ANALISI I (Benedetti)

27/09/2017
Lezione 1

PROF. RICCARDO BENEDETTI
e
F BROGLIA

SITO http://people.dm.unipi/benedetti/didattica.html

$a \in A$ → "a appartiene ad A" / "a è un elemento di A"
(a: elemento, ∈: appartenenza, A: insieme)

$a \notin A$ → "a non appartiene ad A"

$A \subseteq B$ → "A è contenuto in B" / "A è un sottoinsieme dell'insieme B" se ogni $a \in A$, $a \in B$

$A \not\subseteq B$ esiste $a \in A$, tale che $a \notin B$

$A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

$A \neq B \iff A \not\subseteq B$ o $B \not\subseteq A$ → esiste $a \in A$ tale che $a \notin B$ o esiste $b \in B$ tale che $b \notin A$
(o: almeno una delle 2 eventualità)

INSIEMI DI NUMERI

$\mathbb{N}$ → naturali $= \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{Z}$ → $= \{\dots -2, -1, 0, 1, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ → $= \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ q > 0,\ M.C.D.(p, q) = 1 \right\}$

$A \cup B \iff x \in A \cup B$ se $x \in A$ o $x \in B$
(unione: insieme unione)



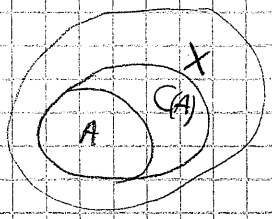
$A \cap B \iff x \in A \cap B$ se e solo se $x \in A$ e $x \in B$



Per ogni insieme A $\emptyset \subseteq A$

INSIEME COMPLEMENTARE

$A \subseteq X$ $\quad X$ = ambiente



$$C_X A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

$C_X \emptyset = X \quad C_X X = \emptyset \quad C_X(C_X(A)) = A$

$C(A \cup B) = C_A \cap C_B$ $\quad$ dimostrare $\Rightarrow$

$C(A \cap B) = C_A \cup C_B$

$$C(A \cup B) = \{x \in X \mid x \notin (A \cup B)\} =$$
$$= \{x \in X \mid x \notin A \text{ e } x \notin B\} =$$
$$= \{x \in X \mid x \in C_A \text{ e } x \in C_B\} \Rightarrow$$
$$C(A \cup B) = C_A \cap C_B$$

$$C(A \cap B) = \{x \in X \mid x \notin (A \cap B)\} =$$
$$\{x \in X \mid x \notin A \text{ o } x \notin B\} =$$
$$= \{x \in X \mid x \in C_A \text{ o } x \in C_B\} \Rightarrow$$
$$C(A \cap B) = C_A \cup C_B$$

ALTRE COSTRUZIONI:

INSIEME PRODOTTO (cartesiano)

se $a \neq b \Rightarrow A \times B \neq B \times A$

$A, B \quad A \times B = \{(a,b) \mid \begin{matrix} a \in A \\ b \in B \end{matrix}\}$

$A \times A = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$

Es. $A = \mathbb{N} \quad (1,2) \neq (2,1) \in \mathbb{N}$

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid \begin{matrix} a_1 \in A_1 \\ a_2 \in A_2 \\ a_3 \in A_3 \end{matrix}\}$

$A^3 = A \times A \times A = \{a_1, a_2, a_3 \mid a \in A\}$

$A^m = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{m}$

L'INSIEME DELLE PARTI $(P(X))$

X = insieme $\quad Y$ = insieme

$P(X) = \{Y_{(\text{insieme})} \mid Y \subseteq X\}$

$Y \subseteq X \quad Y \in P(X)$

$a \in X \quad \{a\} \subseteq X$

$P(P(X)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

FUNZIONI (o APPLICAZIONI)

$f: X \to Y$ f associa ad ogni elemento $x \in X$, un unico elemento $y = f(x) \in Y$

insieme X → insieme di definizione di f o dominio di f

insieme Y → insieme dei valori di f o codominio di f

rel. 030 991 24 26
cell. 388 9837745

Dato $f: X \to Y$ (insiemi associati ad f)

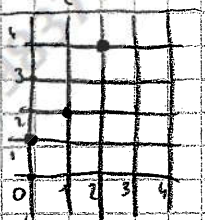
Immagine (f) $= \{y \in Y \mid \exists x \in X, f(x) = y\}$ $(\mathrm{Imm}(f))$

Grafico di f $= \{(x,y) \in (X \times Y) \mid y = f(x)\}$ $(G(f))$

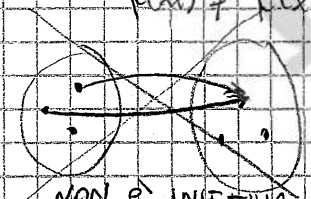
Es.

$X = \mathbb{N} = Y$ $G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = f(x) = 2x\}$

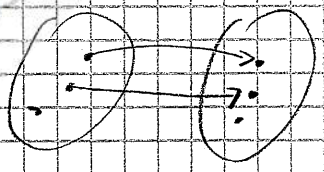
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to 2n$ $\mathrm{Im}(f) = \{\text{insieme dei numeri pari}\}$



$f: X \to Y$ è **iniettiva** se per ogni $x_1, x_2 \in X$ tali che $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$



NON è INIETTIVA



INIETTIVA

è **suriettiva** se per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$ $Y = \mathrm{Im}(f)$

Es. $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to 2n$ $n_1 \neq n_2 \Rightarrow 2n_1 \neq 2n_2$ → è iniettiva

Suriettiva? NO perché Es. $x = 1 \notin \mathrm{Im}(f)$ → perché è dispari (tutti i numeri dispari $\notin \mathrm{Im}(f)$)

Es. 2 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \to x^2$ $\quad m_1 \neq m_2 \quad -1 \neq 1$ $\Rightarrow$ NON È INIETTIVA

$m_1^2 \neq m_2^2 \quad (-1)^2 = (1)^2$

SURGETTIVA? NO perché per es. $-1 \notin Im(f)$ perché è < 0

(ogni $x < 0 \notin Im(f)$ perché $x^2 \geq 0$)

f si dice INVERTIBILE se è contemporaneamente iniettiva e surgettiva;

la funzione inversa si definisce $f^{-1}: y \to x$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ $\quad f(a)$, $g(f(a))$

$g \circ f(a) = g(f(a))$

$(f^{-1})^{-1} = f$

$f^{-1} \circ f = {}^{id}X$

${}^{id}X: X \to X$, $x \to x$

$y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y$

${}^{id}y$

$f: x \to y$ invertibile

$f^{-1}: y \to x$ applicazione inversa di f

IMMAGINE INVERSA $f: A \to B$

- L'immagine inversa di C per mezzo di f è $f^{-1}(C) = \{a \in A \mid f(a) \in C\}$
- L'immagine inversa esiste sempre (come def.), ma la funzione inversa $f^{-1}: y \to x$ NO! $\to$ dipende da $f: x \to y$

QUANTIFICATORI

Le proposizioni hanno un valore di verità: o è VERA, o è FALSA

$X \ni x \quad P(x)$

Es. $\mathbb{N} \ni 2$ 2 è dispari → FALSA

$X \ni \textcircled{x}$ → variabile

$\mathbb{N} \ni x$ x è dispari → proposizione insensata; non ha un valore di verità univoco → cambia al variare di x (NON ACCETTABILE)

2 quantificatori:

$\exists$ → esiste $\quad \exists x \in \mathbb{N}$ x dispari VERA Es $x=1$ dispari

$\forall$ → per ogni $\quad \forall x \in \mathbb{N}$ x dispari FALSA Es $x=2$ non è dispari

$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > m$ VERA

$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m > n$ FALSO → $\nexists m > \forall n$

$P \circ Q$ è vera se almeno una tra P e Q è vera (∪)

P e Q è vera se sono vere entrambe (∩)

non P è vera se e solo se P è falsa (C)

NEGAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE

	P	∃	∀	o	e
negazione	non P	∀	∃	e	o

Es. non($\forall n \in \mathbb{N}$ n è pari) → FALSA

neg → $\exists n \in \mathbb{N}$ è dispari → VERA

non($\exists n \in \mathbb{N}$ n dispari) VERA

neg → $\forall n \in \mathbb{N}$ n pari → FALSA

$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ $m \leq n$

non$(P \circ Q)$ → $C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$

neg. non P e non Q

non $(P$ e $Q)$ → $C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$

non P o non Q

P o non P → SEMPRE VERA

P e non P → SEMPRE FALSA → CONTRADDIZIONE