ANALISI 1

Riccardo Benedetti Filippo Broglia

RICEVIMENTO
GIOVEDÌ 14-16
STUDIO BENEDETTI DIP. MAT

http://people.dm.unipi.it/benedett/dida.html

TERMINOLOGIA INSIEMISTICA

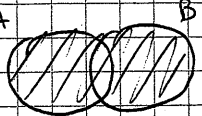
INSIEME = collezione di oggetti detti elementi dell'insieme

- $a \in A$ a è elemento dell'insieme A

Insiemi NUMERICI $\mathbb{N}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \mid q \neq 0 \right\}$ $\mathbb{Z} = \{-1, 2\}$

- $a \notin A$ a non appartiene ad A
- $A \subseteq B$ sottoinsieme, correla due insiemi (A contenuto in B)
  Se ogni $a \in A$, $a \in B$
- $A \not\subseteq B$ esiste $a \in A \mid a \notin B$
- $A = B \longleftrightarrow A \subseteq B$, $B \subseteq A$
  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$
- $A \neq B \longleftarrow A \not\subseteq B$ o $B \not\subseteq A$
  $\exists a \in A \mid a \notin B$
  $\exists b \in B \mid b \notin A$
  (almeno una delle due deve essere vera)
- $A \cup B$ $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A$ o $x \in B$

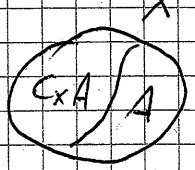


- $A \cap B$ $x \in A \cap B$ se $x \in A$ e $x \in B$

Per ogni insieme A $A \subseteq A$

$\emptyset \Rightarrow$ per ogni insieme A, $\emptyset \subseteq A$

- $C_X A$ $A \subseteq X$ $C_X A = \{x \in X \mid x \notin A\}$



POSTULATI

ASSIOMA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- $C_X \emptyset = X \quad C_X X = \emptyset \quad C_X(C_X A) = A$

- $C_X(A \cup B) = C_X A \cap C_X B = \{x \in X \mid x \notin A \text{ e } x \notin B\}$

se $C_X(A \cup B) \Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B$

$\downarrow$ $C_X A$ $\quad$ $\downarrow$ $C_X B \Rightarrow x \in C_X A \cap C_X B$

- $C_X(A \cap B) = C_X A \cup C_X B$

se $C_X(A \cap B) \Rightarrow x \in C_X A \vee x \in C_X B$

$\Rightarrow x \notin A \quad x \notin B \Rightarrow x \in A \cup B$ perché implicherebbe che $x \in A \vee x \in B$

COSTRUZIONI

Insieme prodotto (cartesiano)

$A, B \neq \emptyset \qquad A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

se $A \neq B \Rightarrow A \times B \neq B \times A$

- $A \times A = \{(a_1, a_2) \mid a_1\ a_2 \in A\}$ (coppia ordinata)

$A = \mathbb{N} \qquad (1,2) \neq (2,1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$

$A^3 = A \times A \times A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in A\}$

$A^n = A_1 \times \cdot A_2 \times \dots A_n$ → una insieme diverso elemento di una insieme

INSIEME DELLE PARTI : l'insieme del sottoinsieme

$P(x) = \{y \text{ insieme} \mid y \subseteq x\}$ l'insieme y è - un sottoinsieme di X
- un elemento dell'insieme parti di X

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (l'insieme delle parti dell'insieme vuoto, non è vuoto una ha un elemento infatti $\emptyset \in P(\emptyset)$

$a \in X \Rightarrow \{a\} \subseteq X$

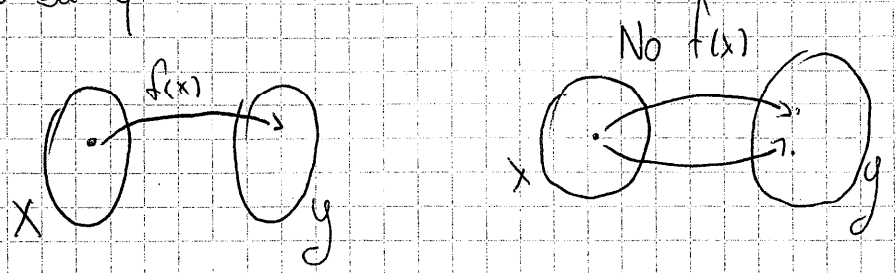
$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$a \in X$ a elemento

$\{a\} \subseteq X$ a insieme

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$f(x)$ è una legge che associa ad ogni elemento di X un solo e unico elemento di y



X = insieme di definizione di f DOMINIO

y = insieme dei valori di f CODOMINIO

Data $f: X \to y$

$Im(f) = \{y \in y\} \quad \exists\, x \in X,\ f(x) = y\}$

GRAFICO DI F

$$G(f) = \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

QUANTIFICATORI

Proposizioni espresse che possono essere VERE o FALSE una sola entrambe

$P(x)$ = proprietà di X → VARIABILE

quantificatori

$\exists$ $x \in \mathbb{N}$

$\exists x \in \mathbb{N} \quad x = 2k+1$ X è dispari (V)

$\forall$ $\forall x \in \mathbb{N}$ X è DISPARI (F)

Affinché $P(x)$ sia verificata, X deve essere quantificata

L'ordine assume una notevole importanza

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} \mid m > n$ → VERA

$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \mid m > n$ → FALSA per $n+1 > m$

DATE DUE PROPOSIZIONI P e Q

- P e Q è vera se sono vere entrambe → $\cap$ (INTERSEZIONE)
- P o Q è VERA se almeno P o Q è vera → $\cup$ (UNIONE)
- NON P se P è FALSA → NEGAZIONE

P: $\exists\ \forall$ e o $\exists x \in \mathbb{N}$

NON P: $\forall\ \exists$ o e $\forall x \in \mathbb{N}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESEMPIO P: $\forall n \in \mathbb{N}$, n è pari → FALSA

NON P: $\exists n \in \mathbb{N}$, n è pari → VERA

- NON(P o Q)
  - non P e non Q → $C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$
- NON (P e Q)
  - NON P o NON Q → $C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$

- P o NON P → SEMPRE VERA
- P E NON P → SEMPRE FALSA → CONTRADDIZIONE

IMPLICAZIONI = Proposizioni riconosciute come vere

$P \Rightarrow Q$ (da ~~impotes~~ ipotesi vere si arriva a conseguenze)

REGOLA DI DEDUZIONE

Se P è VERA e lo è anche $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ È VERA

NON P o Q

Supponiamo che P sia vera $\Rightarrow$ NON P è falsa

poiché NON(P o Q) è VERA $\Rightarrow$ Q È VERA

FUNZIONE $\forall a_1 \in A \ \exists! \ b \in B \mid f(a_1) = b$

FUNZIONE SURIETTIVA $\forall b \in B \ \exists \ a \in A \mid f(a) = b \qquad Im f = B$

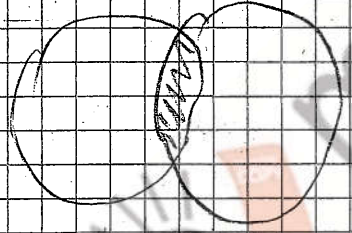
FUNZIONE INIETTIVA $\forall b \in f(A) \ \exists! \ a \in A \mid f(a) = b$

$\forall \ a_1, a_2 \in A \mid a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

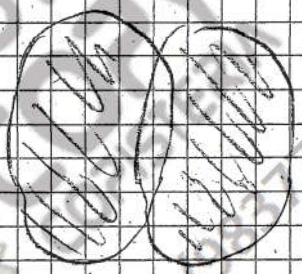
$\forall \ b \in f(A), \ f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$

FUNZIONE BIETTIVA $\forall b \in B \ \exists! \ a \in A \mid f(a_1) = b$

$A \setminus B := C_A(A \cap B)$

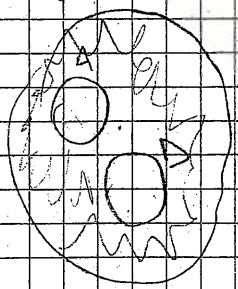


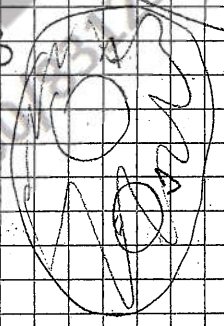
$A \cap B$

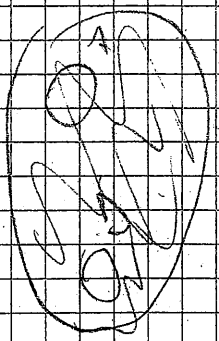


$C_A(A \cap B)$

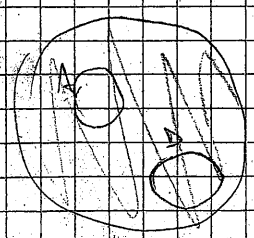
$C_B(A \cup D) = C_B(A) \cap C_B(D)$ — $A, D \subseteq B$

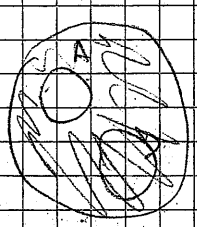


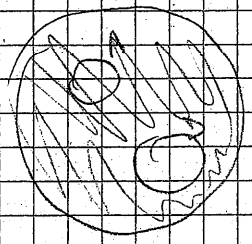




$C_B(A \cap D) = C_B(A) \cup C_B(D)$







MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745