NOZIONI PRELIMINARI E VARI INSIEMI

CONCETTO PRIMITIVO = concetto non definibile per altri termini

$a \in X \longrightarrow$ a è un elemento dell'insieme X

$\searrow$ a appartiene a X

INSIEME VUOTO $\emptyset$ non possiede elementi

$Y \subseteq X \rightrightarrows$ Y è sottoinsieme dell'insieme X
Y è contenuto in X
ogni elemento di Y è elemento di X $\begin{cases} \text{se } a \in Y \\ \Rightarrow a \in X \end{cases}$

INSIEMI UGUALI

Se valgono contemporaneamente $Y \subseteq X$ e $X \subseteq Y$ (HANNO STESSI ELEMENTI)

INSIEMI INVERSI

$X \neq Y \longrightarrow X \not\subseteq Y$ oppure $Y \not\subseteq X$ $\left\{ A \neq B \text{ se } \exists a \in A, a \notin B \text{ oppure se } \exists b \in B, b \notin B \right\}$

Se $X \subseteq Y$ significa che $X \in X$ e $X \in Y$ quindi per negarlo basta che $\exists\, x \in X / x \notin Y$

$\emptyset \subseteq X$ per ogni insieme di X (ogni elemento del vuoto appartiene a X poiché il vuoto non ha elementi)

N.B Siano A, B insiemi dire $A \in B$ NON HA SENSO

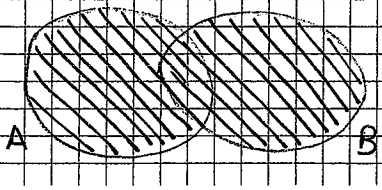
$\{a\} \subseteq A$ HA SENSO perché l'insieme a è fatto di un solo elemento $a \in \{a\}$

INSIEME UNIONE

X, Y insiemi $X \cup Y$ insieme unione

$a \in X \cup Y \iff a \in X$ oppure $a \in Y$

- $X, Y \subseteq X \cup Y$ sono sottoinsiemi dell'insieme unione
- $X \cup Y = X$ se $Y \subseteq X$



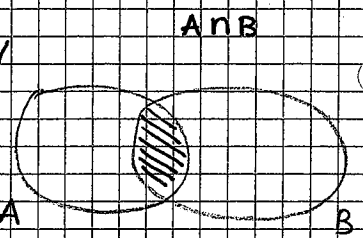
$A \cup B$



INSIEME INTERSEZIONE

X, Y insiemi $\quad X \cap Y$ insieme intersezione

$$a \in X \cap Y \iff a \in X \text{ e } a \in Y$$



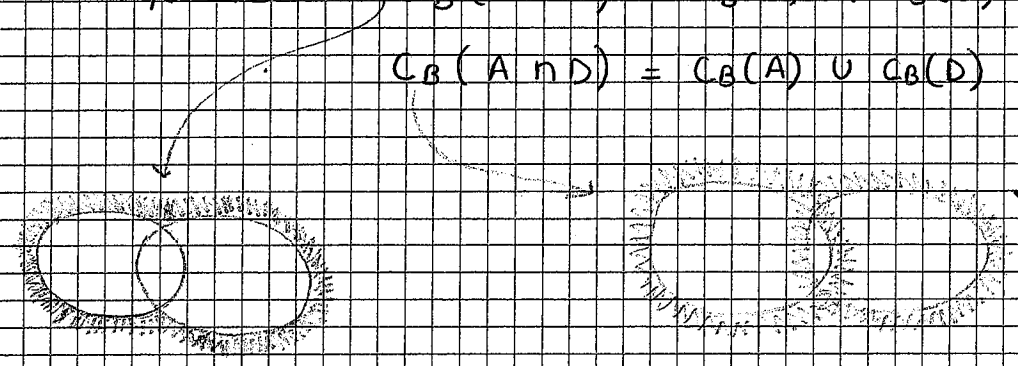
- $X \cap Y \subseteq X$ è sottoinsieme
- $X \cap Y \subseteq Y$ è sottoinsieme

INSIEME COMPLEMENTARE

$Y \subseteq X \qquad C_X(Y) = \{ x \in X \mid x \notin Y \}$ elementi di X che non stanno in Y

- $C_X(C_X(Y)) = Y$
- $A, D \subseteq B \qquad C_B(A \cup D) = C_B(A) \cap C_B(D)$

$$C_B(A \cap D) = C_B(A) \cup C_B(D)$$





INSIEME DELLE PARTI

X insieme $\quad \mathcal{P}(X) = \{ Y \subseteq X \}$ insieme delle parti di X = insieme dei sottoinsiemi di X

- $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ perché il vuoto $\in \mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$ e $\emptyset$ è il suo unico elemento
- $A \neq \emptyset, \; A \subseteq B \longrightarrow a \in \{a\}$

$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ ma $a \notin \mathcal{P}(A)$

Quando $Y \subseteq X$ Y deve essere un insieme
Quando $Y \in \mathcal{P}(X)$ Y deve essere elemento

LO STATO DI UN ENTE IN QUANTO ELEMENTO O INSIEME NON È DATO UNA VOLTA PER TUTTE MA DIPENDE DALLA RELAZIONE CON GLI ALTRI ENTI.

② $L \in \mathbb{R}$ $\quad W = I(x_0, \delta)$

$x_0 = +\infty$ $\quad U = I(L, \varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (M, +\infty)$ t.c $\forall x \in I(x_0, \delta) \cap D \setminus \{x_0\}$

$\forall x \in D \neq x_0 \quad |x - x_0| < \delta$

$f(x) > M$

$f(x) \in (M, +\infty)$



$L \in \mathbb{R} = \lim_{x \to x_0} f(x)$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R}$ t.c $\forall x \in D$

$x > M \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

③ $x_0 = +\infty$ $\mathbb{R}$ $\quad \forall$ intorno di $+\infty$ $(M, +\infty)$ $\exists \delta > 0$ (che determini $I(x_0, \delta)$) t.c

$L = +\infty$ $\quad \forall x \in D \quad x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$

$f(x) > M$

④ $x_0 = -\infty$

$L = +\infty$

$W =$ semiretta $(-\infty, k)$ meno k

$U = (M, +\infty)$

$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists k \in \mathbb{R}$ t.c $\forall x \in (-\infty, k) \cap D$

cioè $\forall x \neq x_0 + \delta \quad x < k \quad f(x) \in (M, +\infty)$

$f(x) > M$

UNICITÀ DEL LIMITE

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ accumulazione per D

- NON ESISTE IL LIMITE → $\nexists$ valore limite in $\overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$ di $f(x)$
- ESISTE E È UNICO → $\exists!$ valore limite in $\overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$ di $f(x)$

DIMOSTRAZIONE (× ASSURDO)

IPOTESI $\quad \exists$ 2 valori limite $\quad L \in \mathbb{R} = \lim_{x \to x_0} f(x)$

con $L \neq L'$ $\quad L' \in \mathbb{R} = \lim_{x \to x_0} f(x)$

OSSERVAZIONE

$\exists$ intorno U di L e intorno U' di L' disgiunti $(U \cap U' = \emptyset)$

quindi $\exists$ intorno W di x_0 t.c $\forall x \in (W \setminus \{x_0\}) \cap D \quad f(x) \in U$

$\exists$ intorno W' di x_0 t.c $\forall x \in (W' \setminus \{x_0\}) \cap D \quad f(x) \in U'$ □

dati W e W' assumo $W' \subseteq W$ (o viceversa $W \subseteq W'$)
quindi quel che vale per W vale per W' (e viceversa)

se $x \in (W' \setminus \{x_0\}) \cap D$ allora $f(x) \in U$ e $f(x) \in U'$
contemporaneamente ovvero $f(x) \in U \cap U'$
ma $U \cap U' = \emptyset$ quindi non può essere possibile che esistano L e L'

XICE MISGIUNTI

$\Rightarrow$ IL LIMITE, SE ESISTE, È UNICO!

LIMITE È PROPRIETÀ LOCALE DELLA FUNZIONE

$f, g : D \to \mathbb{R}$ x_0 di accumulazione per D

IPOTESI $\exists$ un intorno U di x_0 tc $\forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap D$
$f(x) = g(x)$ (sono uguali in un intorno del punto di accumulazione)

TESI Allora se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$

PERMANENZA SEGNO

IPOTESI $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $L \neq 0$ (quindi ha un segno $\lessgtr$)

TESI Allora esiste un intorno W di x_0 tc
$\forall x \in W \cap D \setminus \{x_0\}$
$f(x)$ ha lo stesso segno di L

PROPRIETÀ ALGEBRICHE (x LIMITI)

- LIMITE DI SOMMA

$a, b : D \to \mathbb{R}$ x_0 accumulazione x D

$\lim_{x \to x_0} a(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ $\lim_{x \to x_0} b(x) = L' \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \to x_0} a(x) + b(x) = L + L' \in \overline{\mathbb{R}}$



- LIMITE DI PRODOTTO

$\lim_{x \to x_0} a(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ $\lim_{x \to x_0} b(x) = L' \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \to x_0} a(x) \cdot b(x) = LL' \in \overline{\mathbb{R}}$

- LIMITE DI RECIPROCA

$a : D \to \mathbb{R} \quad \forall x \in D, \ a(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} a(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{a(x)} = \frac{1}{L} \in \overline{\mathbb{R}}$$

CONFRONTO DI FUNZIONI

CONFRONTO 1

$f, g : D \to \mathbb{R}$ x_0 di accumulazione per D

IPOTESI

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \to +\infty$$

$\exists$ intorno W di x_0 t.c $\forall x \in (W \setminus \{x_0\}) \cap D \quad f(x) \geq g(x)$

TESI allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \to +\infty$

CONFRONTO CARABINIERI

$f, h, g : D \to \mathbb{R}$ x_0 accumulazione per D

IPOTESI $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \in \mathbb{R}$

$\exists$ un intorno W di x_0 t.c $\forall x \in W \cap (D \setminus \{x_0\})$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

($g(x) \to L$, $h(x) \to L$)

TESI Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ x confronto

