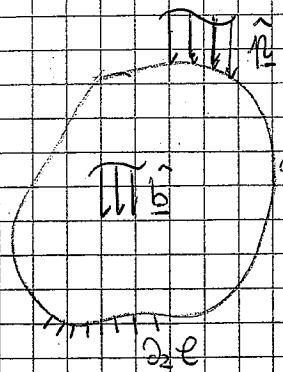
MECCANICA DEL CONTINUO (SOLIDO)

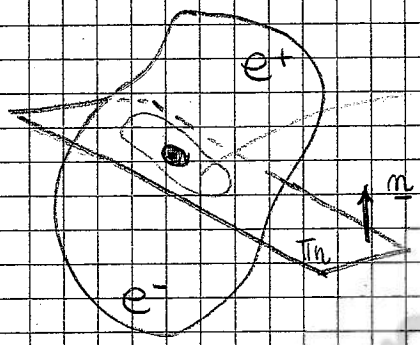


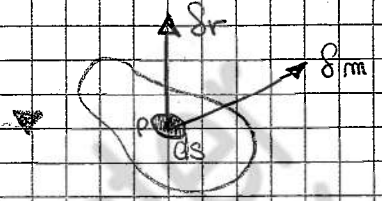
$\hat{n}$ = forze di superficie

$\hat{b}$ = forze di volume

$\partial_2 e$ = superficie vincolata

$\partial_1 e$ = superficie libera





- δr = risultante forze che e^+ fa su e^-
- δm = momento risultante di che e^+ fa su e^-
- $\frac{\delta r}{\delta s}$ = forza per unità di superficie
- $\frac{\delta m}{\delta s}$ = momento per unità di superficie

Le azioni interne agiscono solo tra elementi contigui: azioni di contatto.

Le descrive grazie a → EULERO (principio delle sezioni)
→ CAUCHY (principio della tensione)
→ POISSON

IPOTESI DI CAUCHY

1) $\lim_{\delta s \to 0} \left(\frac{\delta r}{\delta s}\right) = \underline{t}_n(P, \underline{n})$ VETTORE TENSIONE

Questo limite esiste ed è finito e dipende dal punto P e dalla giacitura orientata con normale $\underline{n}$.

Esso è la misura dell'azione locale che, a deformazione avvenuta, la parte e^+ esercita su e^- in P, attraverso π.

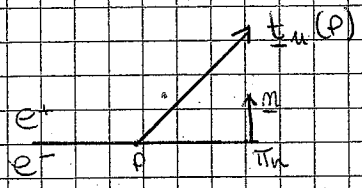
Posso dividere il corpo con una superficie qualunque ma essa più importante è la descrizione del piano tangente tale superficie in P.

2) $\lim_{\delta s \to 0} \left(\frac{\delta m}{\delta s}\right) = 0$

Si considera l'assenza di coppie di sforzo che possono generarsi in P per contatto di e^+ su e^- attraverso δs.

Questa ipotesi vale per i materiali semplici; i materiali che non la rispettano si dicono micropolari.

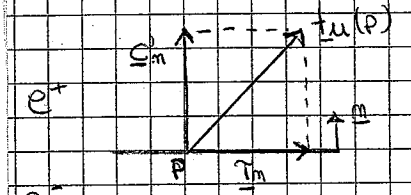
VETORE TENSIONE



$$\underline{t}_n(p)\cdot ds = dF^{(+,-)} \quad \text{(forza elementare)}$$

$$\int_{\Pi_n} \underline{t}_n(p)\, ds = R^{(+,-)} \quad \text{(risultante delle forze)}$$

Ho un vettore tensione per ogni p.to P (∞^3) e per ogni giacitura (∞^2), quindi in ogni p.to avrò ∞^5 $\underline{t}_n(p)$.



COMPONENTI DELLA $\underline{t}_n(p)$

- **TENSIONE NORMALE**

$$\underline{C}_n = (\underline{t}_n \cdot \underline{n})\,\underline{n} \quad \left(\text{oppure } C_n = \underline{t}_n \overset{\text{scalare}}{\cdot} \underline{n}\right)$$

- **TENSIONE TANGENZIALE**

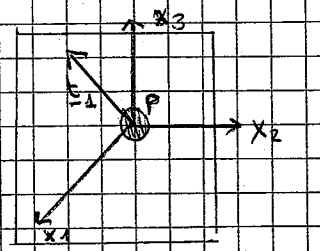
$$\underline{T}_n = \underline{t}_n - \underline{C}_n \quad \left(\text{oppure } T_{nm} = \underline{t}_n \overset{\text{scalare}}{\cdot} \underline{m}\right)$$

master COPY COPISTERIA

- $\underline{C}_n > 0$ corrispondono in P ad azioni tendenti a produrre allontanamento delle due porzioni di solido, dette tensioni di trazione
- $\underline{C}_n < 0$ corrispondono in P a tensioni di compressione che comportano avvicinamento delle due porzioni

$\underline{T}_n$ può essere a sua volta decomposto secondo due direzioni ortogonali nel piano di normale $\underline{n}$.

Le grandezze $\underline{C}_n$ e $\underline{T}_n$ scomposte lungo le due direzioni ortogonali sul piano Π_n, si particolarizzano facilmente per i 3 piani in P parallele ai piani coordinati. Per essi le tensioni si indicano rispettivamente con $\underline{t}_1, \underline{t}_2$ e $\underline{t}_3$. Si chiamano VETTORI TENSIONE SPECIALI.



Scelgo il piano x_2x_3, che ha per normale x_1; trovo $\underline{t}_{x_1}$ (o $\underline{t}_1$).
Allo stesso modo trovo $\underline{t}_2$ e $\underline{t}_3$.

Si chiamano VETTORI SPECIALI perché sono relativi agli assi coordinati.

TEO. DEL TETRAEDO DI CAUCHY O TEO. AUREO
Se scelgo un piano qualunque di normale $\underline{n}$; α, β e γ sono i coseni direttori di $\underline{n}$.

Per il TEO. DEL TETRAEDO DI CAUCHY: $\underline{t}_n = \underline{t}_1\cdot\alpha + \underline{t}_2\cdot\beta + \underline{t}_3\cdot\gamma$

MATRICE DELLE COMPONENTI DI TENSIONE

Essendo $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ e $\underline{e}_3$ i versori di X_1, X_2 e X_3, scomponiamo $\underline{t}_1$ e le sue componenti saranno:

$$\underline{t}_1 \cdot \underline{e}_1 = \sigma_{11} \qquad \underline{t}_1 \cdot \underline{e}_2 = \sigma_{12} \qquad \underline{t}_1 \cdot \underline{e}_3 = \sigma_{13}$$

Per le componenti di $\underline{t}_2$:

$$\underline{t}_2 \cdot \underline{e}_1 = \sigma_{21} \qquad \underline{t}_2 \cdot \underline{e}_2 = \sigma_{22} \qquad \underline{t}_2 \cdot \underline{e}_3 = \sigma_{23}$$

Per le componenti di $\underline{t}_3$:

$$\underline{t}_3 \cdot \underline{e}_1 = \sigma_{31} \qquad \underline{t}_3 \cdot \underline{e}_2 = \sigma_{32} \qquad \underline{t}_3 \cdot \underline{e}_3 = \sigma_{33}$$

Le componenti a indici uguali hanno il significato di tensioni normali agenti sui piani ortogonali ai versori dello stesso indice, mentre le componenti a indici distinti rappresentano le tensioni tangenziali relative alle corrispondenti coppie di direzioni.

MATRICE DELLE COMPONENTI DI TENSIONE

$$T_{ij} = \sigma_{ij} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$[T^t] \cdot [n] = [t_n]$$

- COMPONENTI DI TENSIONE SPECIALI: sono le componenti speciali di tensione (9 componenti) che consentono di trovare i 3 vettori speciali.

$$\begin{cases} \underline{t}_1(P) = \sigma_{11} \cdot \underline{e}_1 + \sigma_{12} \cdot \underline{e}_2 + \sigma_{13} \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{t}_2(P) = \sigma_{21} \cdot \underline{e}_1 + \sigma_{22} \cdot \underline{e}_2 + \sigma_{23} \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{t}_3(P) = \sigma_{31} \cdot \underline{e}_1 + \sigma_{32} \cdot \underline{e}_2 + \sigma_{33} \cdot \underline{e}_3 \end{cases}$$

Se prendo un generico piano di giacitura $\underline{n}$ ottengo le componenti ai piani coordinati, ho un generico $\underline{t}_n$ che dipende dai vettori speciali.

$$\begin{cases} \underline{t}_{n_1}(P) = \underline{t}_n \cdot \underline{e}_1 = (\underline{t}_1 \alpha + \underline{t}_2 \beta + \underline{t}_3 \gamma) \cdot \underline{e}_1 = \sigma_{11}\alpha + \sigma_{21}\beta + \sigma_{31}\gamma \\ \underline{t}_{n_2}(P) = \underline{t}_n \cdot \underline{e}_2 = (\underline{t}_1 \alpha + \underline{t}_2 \beta + \underline{t}_3 \gamma) \cdot \underline{e}_2 = \sigma_{12}\alpha + \sigma_{22}\beta + \sigma_{32}\gamma \\ \underline{t}_{n_3}(P) = \underline{t}_n \cdot \underline{e}_3 = (\underline{t}_1 \alpha + \underline{t}_2 \beta + \underline{t}_3 \gamma) \cdot \underline{e}_3 = \sigma_{13}\alpha + \sigma_{23}\beta + \sigma_{33}\gamma \end{cases}$$

DIREZIONI PRINCIPALI E TENSIONI PRINCIPALI

Il tensore di tensione T, supposto simmetrico, si pone il problema di determinare gli autovalori e autovettori che in questo caso prendono le nome di tensioni principali e direzioni principali.

Si cercano cioè quei vettori di $\vec{C}$ ed $\underline{n}$ per cui, in P, risulta

$$\underline{T \cdot n = \vec{C} \cdot n}$$

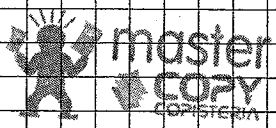
Questo equivale a determinare un piano per il quale la tensione è ad esso ortogonale. Un tale piano si dice piano principale della tensione ed è caratterizzato dall'avere tensione tangenziale nulla $\underline{T_n = 0}$

A una coppia di autovettori distinti, corrispondono due autovettori tra loro ortogonali e vengono i casi di molteplicità di un autovettore

Dal TEO. di CAUCHY:

$$\underline{t_n} = T \cdot \underline{n} = \vec{C}_n \cdot \underline{n}$$

$$(T - C_n I)\, n = 0 \qquad \text{con } I = \text{matrice identica}$$



- Cercare tali giaciture significa risolvere l'eq.ne

$$\underline{[T - \vec{C} I]\, n = 0}$$

Le incognite di questo sistema lineare sono α, β e γ (componenti di $\underline{n}$).

La soluzione banale $\alpha = \beta = \gamma = 0$ non va bene (SOLUZIONE BANALE) poiché (essendo $\underline{n}$ versore unitario) deve essere $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

- Quando un sistema algebrico ammette soluzioni non-banali?

TEO. DI ROUCHÉ-CAPELLI

Il sistema ha soluzione se matrice completa e incompleta hanno stesso rango. Poiché il sistema è omogeneo, è sempre vero che i ranghi sono uguali; infatti ammette soluzione (quella nulla) ma a me non va bene. Voglio che $\text{rank} = 2$, così trovo altre soluzioni, quindi impongo

$$\underline{\det [T - \vec{C} I] = 0}$$

$\det \neq 0 \rightarrow k = 3 \quad (\alpha = \beta = \gamma = 0)$

$\det = 0 \rightarrow k = 2 \quad (\alpha \neq 0, \text{etc})$

Risolvendo gli sviluppi, ottengo:

EQ.ne CARATTERISTICA DI T
- EQ.ne SECOLARE DI LAPLACE

$$\underline{\vec{C}^3 - \vartheta_{\vec{C}}^{(1)} \vec{C}^2 + \vartheta_{\vec{C}}^{(2)} \vec{C} - \vartheta_{\vec{C}}^{(3)} = 0}$$

$$\vartheta_{\vec{C}}^{(1)} = \text{tr}\, T = C_{11} + C_{22} + C_{33}$$ — INVARIANTE LINEARE

$$\vartheta_{\vec{C}}^{(2)} = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}$$ — INVARIANTE QUADRATICA

$$\vartheta_{\vec{C}}^{(3)} = \det T$$ — INVARIANTE CUBICA

Dato che $\bar{T}$ è una matrice simmetrica a coeff. reali, ottengo 3 radici reali $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ e $\bar{\sigma}_3$ che ordino dalla maggiore alla minore

$$\bar{\sigma}_1 > \bar{\sigma}_2 > \bar{\sigma}_3$$

TENSIONI PRINCIPALI

(Soluzioni dell'eq.ne di LAPLACE)

A questo punto uso le $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ e $\bar{\sigma}_3$ (una per volta) nel sistema:

$$(\bar{T} - \bar{\sigma}\, I)\, \underline{n} = 0 \qquad \text{con} \qquad \underline{n}_p = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

e trovo 3 terne di coseni direttori che mi indicano le direzioni principali di tensione (sono mutuamente ortogonali)

$$\underline{n}_{1p} \perp \underline{n}_{2p} \perp \underline{n}_{3p}$$

DIREZIONI PRINCIPALI DELLA TENSIONE

Per ogni p.to e per ogni stato di tensione ho sempre 3 direzioni principali.

Le direzioni principali α, β e γ le ottengo risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_m)\alpha + \bar{\sigma}_{12}\beta + \bar{\sigma}_{13}\gamma = 0 \\ \bar{\sigma}_{21}\alpha + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_m)\beta + \bar{\sigma}_{23}\gamma = 0 \\ \bar{\sigma}_{13}\alpha + \bar{\sigma}_{23}\beta + (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_m)\gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{con } m = 1,2,3$$

assieme alla condizione $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Il procedimento che ho seguito è stato quello della diagonalizzazione di $\bar{T}$: $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ sono gli autovalori e n_{1p}, n_{2p} e n_{3p} sono gli autovettori.

Nel sistema di riferimento principale, con gli assi diretti nell'ordine secondo le tre direzioni principali di n_{1p}, n_{2p} e n_{3p}, la matrice $\bar{T}$ assume la forma:

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_3 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI TENSIONE NEL SISTEMA PRINCIPALE

$\bar{\sigma}_1$ è il massimo valore che può assumere σ_m e $\bar{\sigma}_3$ è quello minimo.

DIM: $\sigma_m = \underline{t}_{m_p} \cdot \underline{n} = \bar{\sigma}_1 \alpha_p^2 + \bar{\sigma}_2 \beta_p^2 + \bar{\sigma}_3 \gamma_p^2 \leq \bar{\sigma}_1 (\alpha_p^2 + \beta_p^2 + \gamma_p^2) = \bar{\sigma}_1$

$\sigma_m = \underline{t}_{m_p} \cdot \underline{n} = \bar{\sigma}_1 \alpha_p^2 + \bar{\sigma}_2 \beta_p^2 + \bar{\sigma}_3 \gamma_p^2 \geq \bar{\sigma}_3$