CAMPI DI DEFORMAZIONI

Un corpo solido sottoposto all'azione dei carichi cambia forma, ovvero assume config. diverse. Come CONFIGURAZIONE di RIFERIMENTO C si considera quella assunta dal corpo in assenza di carichi; i carichi e le azioni esterne le fanno modificare in quelle DEFORMATA C^*

cambiamento di configurazione che rispetta 3 proprietà:
- INVERTIBILITÀ ($\exists\ \hat{\chi}^{-1}$)
- REGOLARITÀ ($\hat{\chi}_{i,j} = \frac{\partial \hat{\chi}_i}{\partial x_j}$ continue)
- PERMANENZA DELLA MATERIA cioè $\det F > 0$

$\hat{\chi}$ trasforma punti interni a C in punti interni a C^*

LEGGE DI DEFORMAZIONE: $\hat{\chi}: \underline{x} \to \underline{x}^*$ $\Rightarrow$ deformazione: $\boxed{\underline{x}^* = \hat{\chi}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{u}(\underline{x})}$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

M. GRADIENTI DI DEFORMAZIONE lontano da $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \boxed{F = H + I}$

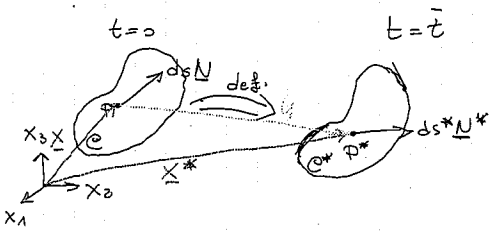
(si considera una fibra di materiale uscente da Φ di lunghezza ds e diretta secondo $\underline{N}$. Sterno per ds^* in P^*)

• MISURE LOCALI DI DEFORMAZIONE

• COEFF. DI DILATAZIONE LINEARE

$$\varepsilon_{N(P)} = \frac{ds^* - ds}{ds}$$

$dx = ds \cdot \underline{N}$
$dx^* = ds^* \underline{N}^*$



$dx^* = F\,dx$

$$(ds^*)^2 = dx^* \cdot dx^* = F\,dx \cdot F\,dx = (F^t F)\,dx\,dx = (F^t F)\,ds\,\underline{N} \cdot ds \cdot \underline{N} = ds^2 (F^t F)\underline{N}\underline{N}$$

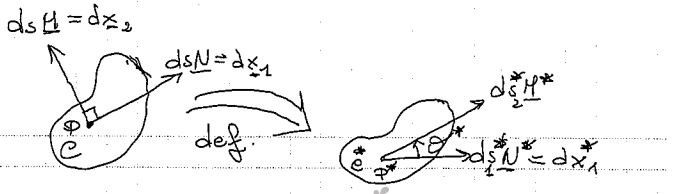
($dx = ds\,\underline{N}$)

$$\boxed{\varepsilon_{N(P)}} = \frac{ds\sqrt{(F^t F)\underline{N}\underline{N}} - ds}{ds} = \boxed{\sqrt{(F^t F)\underline{N}\underline{N}} - 1}$$

$$\boxed{-1 < \varepsilon_N < +\infty}$$

• SCORRIMENTO ANGOLARE (tra due direzioni perpendicolari)

$$\gamma_{NH(P)} = \frac{\pi}{2} - \theta^*$$



$\theta^* = \frac{\pi}{2} - \gamma_{NH} \Rightarrow \cos\theta^* = \operatorname{sen}(\gamma_{NH(P)})$

(dalla def. di prodotto scalare)

$$dx_1^* \cdot dx_2^* = ds_1^* \cdot ds_2^* \cos\theta^* = ds\,(1+\varepsilon_N) \cdot ds\,(1+\varepsilon_H)\cos\theta^* \quad (1)$$

$ds^* = ds\,(1+\varepsilon_N)$ $\left(\Rightarrow \varepsilon_N = \frac{ds^* - ds}{ds}\right)$

$$dx_1^* \cdot dx_2^* = F\,dx_1 \cdot F\,dx_2 = (F^t F)\,dx_1\,dx_2 = (F^t F)\,ds \cdot \underline{N} \cdot ds\,\underline{H} = ds^2 (F^t F)\underline{N}\underline{H} \quad (2)$$

($dx = ds\,\underline{N}$)

Uguagliando (1) e (2): $ds(1+\varepsilon_N) \cdot ds(1+\varepsilon_H)\cos\theta^* = ds^2 (F^t F)\underline{N}\underline{H}$

$$\cos\theta^* = \frac{(F^t F)\,\underline{N}\,\underline{H}}{(1+\varepsilon_N)(1+\varepsilon_H)} \Rightarrow \boxed{\gamma_{NH(P)} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{(F^t F)\,\underline{N}\,\underline{H}}{(1+\varepsilon_N)(1+\varepsilon_H)}\right)}$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < \gamma_{NH} < \frac{\pi}{2}}$$

- COEFF. DI DILATAZIONE CUBICA (VARIAZIONE VOLUMICA)

$$\theta_{(P)} = \frac{dV^* - dV}{dV} \qquad dV = dx_1 dx_2 dx_3 \qquad dV^* = dx_1^* dx_2^* dx_3^*$$

$$\boxed{\theta_{(P)}} = \frac{\mathcal{F}dx_1 \cdot \mathcal{F}dx_2 \mathcal{F}dx_3 - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} = \frac{\mathcal{F}dx_1 \cdot \mathcal{F}dx_2 \cdot \mathcal{F}dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} - 1 =$$

$$= \boxed{\det(\mathcal{F}) - 1} \qquad \boxed{-1 < \theta < +\infty}$$

TEORIA LINEARE DELLA DEFORMAZIONE

Serve a linearizzare (e quindi semplificare) le formule di $\varepsilon_N, \gamma_{NH}, \theta$

DI MO: $x^*_{i,j} = \mathcal{F}_{i,j} = u_{i,j} + \delta_{i,j}$ (identità) (gradiente spostamento)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{F} = H + I$$

(H. Deformazioni) (H. Spostamento)

I gradienti di spost. possono essere visti come gradienti di H: $H_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

MATRICE GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

Si impone l'IPOTESI DI PICCOLEZZA DEI GRADIENTI DI SPOSTAMENTO (non degli spostamenti)

$$\boxed{|H_{i,j}| \ll 1 \quad \forall i,j} \quad \text{o} \quad |u_{i,j}| \ll 1$$

Quindi la DILATAZIONE LINEARE: $\varepsilon_{N(P)} = \sqrt{(\mathcal{F}^t \mathcal{F})\underline{N}\underline{N}} - 1$

$$\mathcal{F}^t\mathcal{F} = (H+I)^t(H+I) = \cancel{H^t H}^{(\ll 1)} + H^t I + I^t H + I^t I \simeq \left(H = \varepsilon_0 H_0\right) = \varepsilon_0 H_0^t + \varepsilon_0 H_0 + I =$$

(H^t, H, I)

$$= \varepsilon_0 (H_0^t + H_0) + I =$$

$$(\mathcal{F}^t\mathcal{F})\underline{N}\underline{N} = \varepsilon_0 (H_0^t + H_0)\underline{N}\underline{N} + \overbrace{I\underline{N}\underline{N}}^{1}$$

Norma di H: $\|H\| = \sqrt{\sum_{i,j} H_{ij}^2} = \varepsilon_0 \ll 1$

$H_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} H \qquad \varepsilon_0 \ll 1$

$E_0 = \frac{H_0^t + H_0}{2}$

$\|H_0\| = 1.$

$$\boxed{\varepsilon_{N(P)}} = \sqrt{(\mathcal{F}^t\mathcal{F})\underline{N}\underline{N}} - 1 = \sqrt{1 + \varepsilon_0 (H_0^t + H_0)\underline{N}\underline{N}} - 1 =$$

$$= \sqrt{1 + \varepsilon_0 (2E_0)\underline{N}\underline{N}} - 1 \Rightarrow \text{Taylor: } \left(\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}\right) \Rightarrow = \cancel{1} + \frac{\varepsilon_0}{\cancel{2}} \cancel{2} E_0 \underline{N}\underline{N} - \cancel{1} = \varepsilon_0 E_0 \underline{N}\underline{N}$$

$$= \varepsilon_0 \left(\frac{H_0^t + H_0}{2}\right)\underline{N}\underline{N} = \varepsilon_0 \left(\frac{H^t + H}{2\varepsilon_0}\right)\underline{N}\underline{N} = \boxed{E\,\underline{N}\underline{N}}$$

$$\boxed{E = \text{sym}\, H = \frac{H^t + H}{2}}$$ TENSORE DI DEFORMAZIONE INFINITESIMA

NOTA: una matrice generica si compone di una parte simm. ed una antisimm:
$A = A_{sym} + A_{asym}$
con:
$A_{sym} = \frac{1}{2}(A + A^t)$
$A_{asym} = \frac{1}{2}(A - A^t)$

Conseguenze: $\|E\| \leq \varepsilon_0 \Rightarrow |\varepsilon_N| \leq \|E\| \leq \varepsilon_0 \ll 1$

Se i gradienti sono piccoli, la dilatazione lineare in ogni punto è limitata superiormente dalla norma di H (ordine di 10^{-3}), quindi è una deformazione piccola.

Allo stesso modo trovo lo SCORRIMENTO ANGOLARE:

Riprendo la (1): $dx_1^* \cdot dx_2^* = ds^2(1+\varepsilon_N)(1+\varepsilon_H)\cos\theta^* \underset{(\gamma_{NH}=\frac{\pi}{2}-\theta^*)}{=} ds^2(1+\varepsilon_N)(1+\varepsilon_H)\operatorname{sen}(\gamma_{NH})$

dove $(1+\varepsilon_N)(1+\varepsilon_H) \to 1$ considerando le piccole deformazioni; $\|\varepsilon_N(P)\| \ll 1$
e poi $\operatorname{sen}(\gamma_{NH}) \cong \gamma_{NH}$.

$dx_1^* \cdot dx_2^* = ds^2 \cdot \gamma_{NH}$ (3)
Mentre dalla (2): $dx_1^* dx_2^* = ds^2 (F^t F) \cdot N \cdot H$ (4)
$F^t F = (H+I)^t (H+I) = H^t H + IH + H^t I + II \cong H + H^t + I = I + 2E = 2E$
$E = \frac{1}{2}(H+H^t)$

Uguagliando (3) e (4):

$ds^2 \cdot \gamma_{NH} = ds^2 (2E) N \cdot H \Rightarrow \boxed{\gamma_{NH(P)} = 2E\, N \cdot H}$

Poi trovo anche la VARIAZIONE VOLUMICA

$\Theta = \det(F) - 1 \qquad F = H + I$

$\det(F) = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

$\boxed{\Theta_{(P)} = \operatorname{tr}(E) = \operatorname{div}(u)}$

Bisogna determinare la:

* MATRICE DI DEFORMAZIONE E

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Considerando: $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Avrò:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_1 = \underset{(N)\,(N)}{E_{1,1}} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \cong \frac{1}{2}\left(\underset{(N)(H)}{2E_{1,2}}\right) = \frac{\gamma_{12}}{2} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Quindi: $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

* RICERCA DEI MAX e MIN di ε_N

È possibile

Dato: $\underline{N} = (\alpha, \beta, \gamma)$ $\Rightarrow \varepsilon_N = E \cdot \underline{N} \cdot N \equiv \varepsilon_{11}\cdot\alpha^2 + \varepsilon_{12}\cdot\alpha\beta + \varepsilon_{13}\alpha\gamma + \varepsilon_{21}\beta\alpha +$

$+\varepsilon_{22}\beta^2 + \varepsilon_{23}\beta\gamma + \varepsilon_{31}\cdot\gamma\alpha + \varepsilon_{32}\gamma\beta + \varepsilon_{33}\gamma^2$

Ho ε_N MAX/MIN quando:

$$\begin{cases} \varepsilon_N = \text{extr} \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{cases}$$ (vincolo di NORMALITÀ)

Utilizzo il METODO MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE; che serve a calcolare gli estremi di una funzione le cui variabili sono vincolate da una relazione

In questo caso la relazione è il vincolo di normalità

$$\begin{cases} \Psi_{(\alpha,\beta,\gamma,\bar{\varepsilon})} = \varepsilon_{N(\alpha,\beta,\gamma)} + \underbrace{\bar{\varepsilon}\left(1 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right)}_{\text{Moltiplicatore di Lagrange}} \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \end{cases}$$

Quindi $\Rightarrow \Psi_{(\alpha,\beta,\gamma,\bar{\varepsilon})} = \varepsilon_{N(\alpha,\beta,\gamma)}$

Quindi cercare i max/min di ε_N equivale a cercare i max/min di Ψ.

Inoltre ho che $\varepsilon_N = \text{extr}$ se $\boxed{\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} = \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma} = 0}$ $\Rightarrow$ per fare sì che siamo direzioni di massimalità

$$\begin{cases} \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = 2\varepsilon_{11}\alpha + \varepsilon_{12}\beta + \varepsilon_{13}\gamma + \varepsilon_{21}\beta + \varepsilon_{31}\gamma - 2\bar{\varepsilon}\alpha = 0 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} = 2\varepsilon_{22}\beta + \varepsilon_{12}\alpha + \varepsilon_{21}\alpha + \varepsilon_{23}\gamma + \varepsilon_{32}\gamma - 2\bar{\varepsilon}\beta = 0 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma} = 2\varepsilon_{33}\gamma + \varepsilon_{13}\alpha + \varepsilon_{23}\beta + \varepsilon_{31}\alpha + \varepsilon_{32}\beta - 2\bar{\varepsilon}\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\frac{1}{2}\varepsilon_{11}\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_{12}\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_{13}\gamma - \bar{\varepsilon}\alpha = 0$

Sist lineare e omogeneo

$$\Rightarrow \begin{cases} (\varepsilon_{11}-\bar{\varepsilon})\alpha + \varepsilon_{12}\beta + \varepsilon_{13}\gamma = 0 \\ \varepsilon_{12}\alpha + (\varepsilon_{22}-\bar{\varepsilon})\beta + \varepsilon_{23}\gamma = 0 \\ \varepsilon_{31}\alpha + \varepsilon_{32}\beta + (\varepsilon_{33}-\bar{\varepsilon})\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow (E - \bar{\varepsilon}I)\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(E-\bar{\varepsilon}I)\cdot\underline{N} = 0}$$

Il quale equivale al seguente SISTEMA LINEARE OMOGENEO

$$\begin{cases} (\varepsilon_{11}-\bar{\varepsilon})\alpha + \varepsilon_{12}\beta + \varepsilon_{13}\gamma = 0 \\ \varepsilon_{12}\alpha + (\varepsilon_{22}-\bar{\varepsilon})\beta + \varepsilon_{23}\gamma = 0 \\ \varepsilon_{13}\alpha + \varepsilon_{23}\beta + (\varepsilon_{33}-\bar{\varepsilon})\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow (E-\bar{\varepsilon}I) = 0 \Rightarrow E_N = \bar{\varepsilon}\cdot\underline{N}$$

Cioè il sistema ammette soluzioni non banali quando:

$\boxed{\det[E-\bar{\varepsilon}I] = 0}$ (se $\det \neq 0$ ho la sola soluzione nulla).

Cercare i MAX e MIN di ε_N equivale a trovare:

- AUTOVALORI di E:

imporgo: $\det(E-\bar{\varepsilon}I)=0$ $\Rightarrow$ ottengo EQ. CARATTERISTICA di E

$$\det(E-\bar{\varepsilon}I) = -\bar{\varepsilon}^3 + \vartheta_{\varepsilon_1}\bar{\varepsilon}^2 - \vartheta_{\varepsilon_2}\bar{\varepsilon} + \vartheta_{\varepsilon_3} = 0$$

$$\begin{cases} \vartheta_{\varepsilon_1} = tr(E) = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} \\ \vartheta_{\varepsilon_2} = \det\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} \\ \vartheta_{\varepsilon_3} = \det(E) \end{cases}$$



Risolvendo ottengo 3 AUTOVALORI di E: $\boxed{\bar{\varepsilon}_1 > \bar{\varepsilon}_2 > \bar{\varepsilon}_3}$ (MAX, MIN) DEFORMAZIONI PRINCIPALI

- AUTOVETTORI di E:

imponendo $(E-\bar{\varepsilon}I)\underline{N}=0$ con la condizione aggiuntiva che: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ $\left(o\ \ n_x^2+n_y^2+n_z^2=1\right)$

$$\begin{cases} (\varepsilon_{11}-\bar{\varepsilon}_i)\alpha + \varepsilon_{12}\beta + \varepsilon_{13}\gamma = 0 \\ \varepsilon_{21}\alpha + (\varepsilon_{22}-\bar{\varepsilon}_i)\beta + \varepsilon_{23}\gamma = 0 \\ \varepsilon_{31}\alpha + \varepsilon_{32}\beta + (\varepsilon_{33}-\bar{\varepsilon}_i)\gamma = 0 \end{cases}$$

Risolvendo per $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_1$ trovo $\Rightarrow$ $\underline{N}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

per $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_2$ $\Rightarrow$ $\underline{N}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

per $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_3$ $\Rightarrow$ $\underline{N}_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$

$\Rightarrow$ DIREZIONI PRINCIPALI

