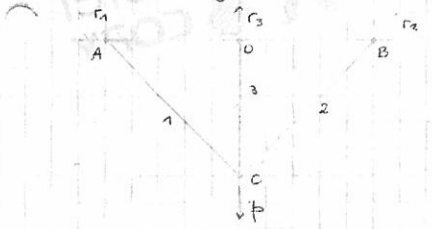
TEORIA SolC I

Struttura: organismo resistente capace di sostenere forze esterne.
le più semplici → TRAVATURE elementi strutturali: TRAVI e ASTE
monodim: lunghezza prevale su sez. trasversale.



3 aste, unite da: CERNIERE

* VINCOLO in A → PERFETTO e BILATERALE
PERFETTO: non CEDEVOLE e LISCIO (privo di attrito)

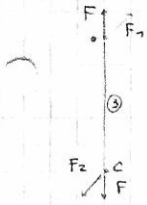
Le forze reattive (espresse dal vincolo) non compiono lavoro su ogni atto di moto del corpo sul quale il vincolo agisce che sia compatibile con il vincolo stesso.

Cerniere A, 0, B ESTERNA
Cerniera C INTERNA

Struttura Reticolare:
① Costituita da aste ad asse rettilineo
② vincoli interni ed esterni, sono CERNIERE (perfette) di ESTREMITÀ
③ i CARICHI ESTERNI applicati nei NODI - COMPORTAMENTO RETICOLARE.

master COPY

Comportamento Reticolare



Equilibrio, soddisfare le eq. CARDINALI della STATICA.

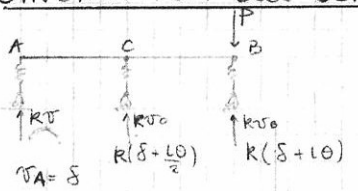
$F_1 = F_2$ $\sum$ risultanti $= 0$

applicati così non c'è equilibrio di rotazione
F_1 rispetto a 0; F_2 rispetto a $0 \neq 0$.
L'unico modo è che ci sia una coppia di braccio nullo
l'asta può essere o TESA o COMPRESSA
forze dirette lungo l'asta → ASTA RETICOLARE

SISTEMA STATICAMENTE INDETERMINATO.

Sistema per il quale le eq cardinali della statica, da sole non consentono di determinare una sol. univoca.
consente di determinare a meno di un parametro che può assumere un qualsiasi valore

CINEMATICA del CORPO RIGIDO





$|\delta| \ll L$
$|\theta| \ll 1$

VINCOLI CEDEVOLI in modo ELASTICO
δ, θ parametri cinematici, ne bastano 2

$\sin\theta = \theta + o(\theta)$
$\cos\theta = 1 + o(\theta)$

$v_C = L/2 \sin\theta = L/2\,\theta + \delta$
$v_B = L \cdot \sin\theta = L\theta + \delta$

$y_A = kv_A = k \cdot \delta$ $y_B = kv_B = k(\delta + L\theta)$
$y_C = kv_C = k(\delta + \frac{L\theta}{2})$

$$\begin{cases} P = k\delta + k(\delta + \frac{L\theta}{2}) + k(\delta + L\theta) \\ \text{(B)}\ L \cdot k \cdot \delta + \frac{L}{2} k\left(\delta + \frac{L\theta}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta = -\frac{1}{6} L\theta \quad \theta = \frac{P}{KL} \quad \delta = -\frac{1}{6}\frac{P}{K}$$

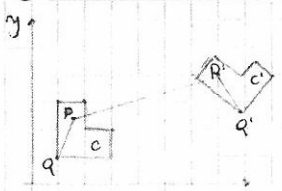
$y_B = \frac{5}{6}P$ $y_A = -\frac{1}{6}P$ $y_C = \frac{1}{3}P$ $y_A + y_B + y_C = P$

Soluzione d'Equilibrio, unica e lineare

È stato possibile risolvere il probl staticamente indeterminato supponendo i vincoli cedevoli elasticamente (δ, θ)

master COPY

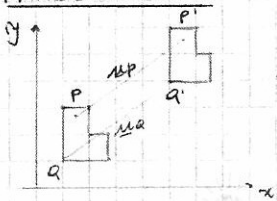
CINEMATICA del CORPO RIGIDO



$u_P = (P' - P)$

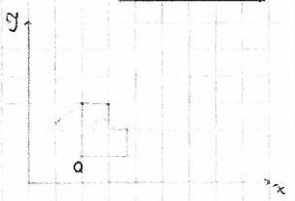
$u_P = u_{Px}\,\underline{i} + u_{Py}\,\underline{j} + u_{Pz}\,\underline{k}$

TRASLAZIONE



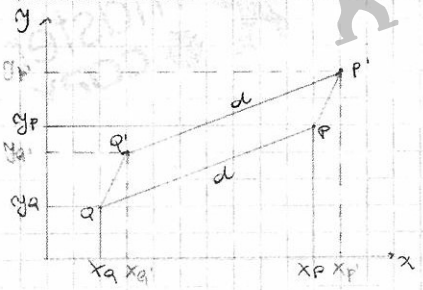
$\underline{u}_P = \underline{u}_Q \quad \forall P \in C$

ROTAZIONE



asse uscente
tutti i pnti su un certo asse non variano
asse di rotazione

CONDIZIONE di RIGIDITA'



$P(x_P, y_P)$

$Q(x_Q, y_Q)$

$d = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$ $\quad d^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2$

$x_{P'} = x_P + u_{Px}$ $\quad x_{Q'} = x_Q + u_{Qx}$

$y_{P'} = y_P + u_{Py}$ $\quad y_{Q'} = y_Q + u_{Qy}$

$d^2 = (x_{P'} - x_{Q'})^2 + (y_{P'} - y_{Q'})^2$

$d^2 = (x_P + u_{Px} - x_Q - u_{Qx})^2 + (y_P + u_{Py} - y_Q - u_{Qy})^2$

$d^2 = [(x_P - x_Q) + (u_{Px} - u_{Qx})]^2 + [(y_P - y_Q) + (u_{Py} - u_{Qy})]^2$

$d^2 = (x_P - x_Q)^2 + (u_{Px} - u_{Qx})^2 + 2(x_P - x_Q)(u_{Px} - u_{Qx}) + (y_P - y_Q)^2 + (u_{Py} - u_{Qy})^2 + 2(y_P - y_Q)(u_{Py}$

$d^2 = d^2 + \underbrace{(u_{Px} - u_{Qx})^2 + (u_{Py} - u_{Qy})^2}_{\text{trascurabili}} + 2(x_P - x_Q)(u_{Px} - u_{Qx}) + 2(y_P - y_Q)(u_{Py} - u_{Qy})$

$(x_P - x_Q)(u_{Px} - u_{Qx}) + (y_P - y_Q)(u_{Py} - u_{Qy}) = 0$

si può scrivere come $(P - Q)\cdot(u_P - u_Q) = 0$ $\quad (u_P - u_Q) = \Theta\,\underline{k} \wedge (P - Q)$

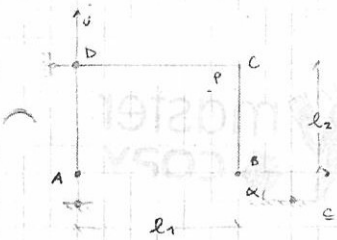
Condizione di Rigidità $\quad \underline{u}_P = \underline{u}_Q + \Theta\,\underline{k} \wedge (P - Q)$

Es

VINCOLO: PENDOLO permette spostamenti ⊥ al vincolo

⇕ equivale

∄ vincoli definiscono una configurazione univocamente determinata?



$\underline{u}_P = \underline{u}_A + \Theta\underline{k} \wedge (P-A)$ $\quad \underline{u}_B = \underline{u}_A + \Theta\underline{k} \wedge (B-A)$

$\underline{u}_D = \underline{u}_A + \Theta\underline{k} \wedge (D-A)$

$\Theta\underline{k} \wedge (D-A) = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \Theta \\ 0 & l_2 & 0 \end{pmatrix} = -l_2\Theta\,\underline{i}$

$\Theta\underline{k} \wedge (B-A) = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \Theta \\ l_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -l_1\Theta\,\underline{j}$

$\underline{u}_D = u_{Ax}\underline{i} + u_{Ay}\underline{j} - l_2\Theta\,\underline{i}$
$= (u_{Ax} - l_2\Theta)\underline{i} + u_{Ay}\underline{j}$

$\underline{u}_B = u_{Ax}\underline{i} + u_{Ay}\underline{j} + l_1\Theta\,\underline{j}$
$= u_{Ax}\underline{i} + (u_{Ay} + l_1\Theta)\underline{j}$

Generici spostamenti infinitesimi di D e B espressi con $\underline{u}_A$

Equazioni vincolari

Ⓐ 1) $\underline{u}_A \cdot \underline{j} = 0$ $\quad u_{Ay} = 0$

Ⓓ 2) $\underline{u}_D \cdot \underline{i} = 0$ $\quad u_{Dx} = 0 \rightarrow u_{Ax} - l_2\Theta = 0$

Ⓑ 3) $\underline{u}_B \cdot \underline{c} = 0$ $\quad [u_{Ax}\underline{i} + (u_{Ay} + l_1\Theta)\underline{j}] \cdot (-\cos\alpha\,\underline{i} + \sin\alpha\,\underline{j}) = 0$

$-u_{Ax}\cos\alpha + u_{Ay}\sin\alpha + l_1\Theta\sin\alpha = 0$ incognite

$$\begin{cases} u_{Ay} = 0 \\ u_{Ax} - l_2\Theta = 0 \\ -u_{Ax}\cos\alpha + u_{Ay}\sin\alpha + l_1\Theta\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l_2 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & l_1\sin\alpha \end{pmatrix}$$ MATRICE CINEMATICA

$\det \mathcal{C} = l_2\cos\alpha - l_1\sin\alpha$

2) $\det \mathcal{C} = 0$ $\quad l_2\cos\alpha - l_1\sin\alpha = 0$ $\quad (u_{Ax} = u_{Ay} = \Theta = 0)$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{l_2}{l_1}$

1) SLZ. BANALE $\det \mathcal{C} \neq 0$ $\quad \operatorname{tg}\alpha \neq \frac{l_2}{l_1}$ $\quad$ CINEMATICAMENTE ISODETERMINATA

i vincoli descrivono univocamente la configurazione

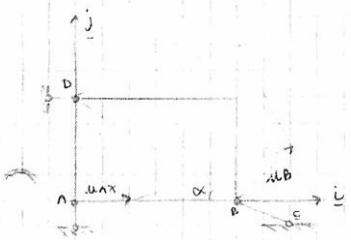
non ∃ altre slz? $u_{Ax} = u_{Ay} = \Theta = 0$

2*) $$\begin{cases} u_{Ay} = 0 \\ u_{Ax} - l_2\Theta = 0 \\ -u_{Ax} + u_{Ay}\frac{l_2}{l_1} + l_2\Theta = 0 \end{cases}$$ ← comb lineare delle altre 2

infinite slz $\quad u_{Ay} = 0$

$u_{Ax} = l_2\Theta$

$\Theta = \Theta$

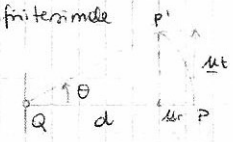


Ⓓ centro di istantanea ROTAZIONE
rette d'azione di A, D, B convergono in D

non ci può essere questa configurazione → VINCOLI RIGIDI
perché sono spostamenti infinitesimi

VINCOLO: BIELLA molteplicità = 2 permette solo rotazione

θ = infinitesimo



$\underline{u}_r = \overline{QP}(1-\cos\theta)\underline{r}$

$\underline{u}_t = \overline{QP}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underline{t}$

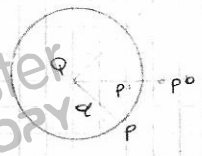
$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots + \ldots = 1$ sviluppi di MC-LAURIN

$\mathrm{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \ldots \simeq \theta$

z = asse di rotazione

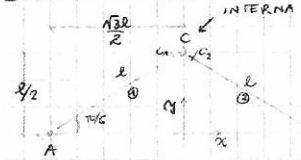
$\underline{u} = d(1-\cos\theta\,\underline{r}) + d\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underline{t}$

$\underline{u} = d\theta\,\underline{t}$



Spostamento fittiziamente ortogonale alla congiungente.

Esercitazione



CERNIERE vincoli che ni bloccano gli spostamenti in 2 dimensioni → molteplicità = 2

$\begin{cases} u_{Ax}=0 \\ u_{Ay}=0 \end{cases}$ ← esterno → $\begin{cases} u_{Bx}=0 \\ u_{By}=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u_{cx①} = u_{cx②} \\ u_{cy①} = u_{cy②} \end{cases}$

∃ campo di spost. rigido infinitesimo compatibile con i vinc

Come è determinata questa struttura?

① $\underline{u}_{p_1}^{①} = \underline{u}_A + \theta_1 \underline{k} \wedge (P_1 - A)$ $\quad u_{Ax} = u_{Ay} = 0 \longrightarrow \underline{u}_A = 0$

② $\underline{u}_{p_2}^{②} = \underline{u}_B + \theta_2 \underline{k} \wedge (P_2 - B)$ $\quad u_{Bx} = u_{By} = 0 \longrightarrow \underline{u}_B = 0$

$\underline{u}_c^{①} = \underline{u}_A + \theta_1 \underline{k} \wedge (P_2 - B) = \theta_1 \underline{k} \wedge \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\,\underline{i} + \frac{\ell}{2}\underline{j}\right) = -\frac{\ell}{2}\theta_1\,\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\theta_1\,\underline{j}$

$\underline{u}_c^{②} = \underline{u}_B + \theta_2 \underline{k} \wedge (C - B) = \theta_2 \underline{k} \wedge \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\,\underline{i} + \frac{\ell}{2}\underline{j}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\theta_2\,\underline{j} - \frac{\ell}{2}\theta_2\,\underline{i}$

verifico se $\begin{cases} u_{cx}^{①} = u_{cx}^{②} \\ u_{cy}^{①} = u_{cy}^{②} \end{cases}$ se $\theta_1 = \theta_2 = 0$ il sistema è bloccato

$\begin{cases} -\frac{\ell}{2}\theta_1 = -\frac{\ell}{2}\theta_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\theta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \\ \theta_1 = -\theta_2 \end{cases} \quad \theta_1 = \theta_2 = 0$

non c'è campo rigido di spostamento compatibile con i vincoli: la struttura è ISODETERMINATA

GdL = 6, necessito di 6 equazioni

GdV = 6 6 gradi di libertà, bloccati da 6 gradi di vincolo.

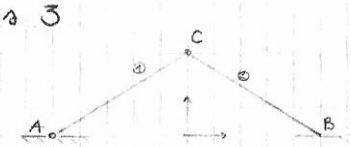
$$\begin{array}{l} u_{Ax} \\ u_{Ay} \\ u_{Bx} \\ u_{By} \\ u_{Ax} - \ell/2\,\theta_1 = u_{Bx} - \ell/2\,\theta_2 \\ u_{Ay} + \ell\sqrt{3}/2\,\theta_1 = u_{By} - \ell\sqrt{3}/2\,\theta_2 \end{array} \begin{pmatrix} u_{Ax} & u_{Ay} & \theta_1 & u_{Bx} & u_{By} & \theta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\ell/2 & -1 & 0 & -\ell/2 \\ 0 & 1 & \ell\sqrt{3}/2 & 0 & -1 & \ell\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{Ax} \\ u_{Ay} \\ \theta_1 \\ u_{Bx} \\ u_{By} \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[C]^{n\times m}$ n = righe = GdV, m = colonne = GdL

$[C] \cdot [X] = [0]$

Se non ci sono altre soluzioni, l'unica è quella banale, tutto il vettore $[X] = 0$

Es 3



$\begin{cases} u_{Cx}^{①} = u_{Cx}^{②} \\ u_{Cy}^{①} = u_{Cy}^{②} \end{cases}$ VINCOLO: INCASTRO

$\begin{cases} u_{Ax} = 0 \\ u_{Ay} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u_{Bx} = 0 \\ u_{By} = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$

$u_{Ax} = u_{Ay} = 0$
$u_{Bx} = u_{By} = 0$
$\theta_2 = 0$
$u_{Ax} - \frac{l}{2}\theta_1 - u_{Bx} + \frac{l}{2}\theta_2 = 0$
$u_{Ay} + \frac{l\sqrt{3}}{2}\theta_1 - u_{By} + \frac{l\sqrt{3}}{2}\theta_2 = 0$

u_{Ax}	u_{Ay}	θ_1	u_{Bx}	u_{By}	θ_2
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
1	0	$-l/2$	-1	0	$l/2$
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}l$	-1	0	$\sqrt{3}/2$

C'è un'eq. di vincolo di più

STRUTTURA IPERDETERMINATA

Rango ← caratteristica [C]

$k_0 = 6$
$k_1 = 6$ → compl

si ha la stessa sol (quella banale) anche se si cancellasse una riga.

Analisi Cinematica di una struttura $[C]^{n \times m}$ MATRICE CINEMATICA

$[C][X] = [0]$ ← vett incognite che identificano i corpi di spost

V = grado complessivo di vincolo
↳ somma delle molteplicità dei vincoli esterni ed interni

G = gradi di libertà del SISTEMA MATERIALE (che costituisce la struttura in assenza di vincoli)
= 3 × n° di corpi (nel piano)

$\boxed{\begin{matrix} n = V \\ m = G \end{matrix}}$

k_0 = CARATTERISTICA della mat [C] (Rango) per Rouché-Capelli ∞^{m-k_0} sol

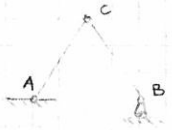
se $m = k_0$ il sistema $[C][X] = [0]$, ammette la sola sol banale (nulla)

4 SITUAZIONI

A1) $V < G \Rightarrow n < m$ e $k_0 < m$

→ arco con carrello
CINEMATICAMENTE LABILE o IPODETERMINATA

$\begin{cases} n = 5 \ (= V) \\ m = 6 \ (= G) \\ k_0 = 5 \end{cases}$



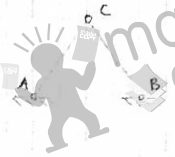
A2) $V \geq G \Rightarrow n \geq m$; ma $k_0 < m$
CINEMATICAMENTE LABILE (vincoli mal-disposti)
IPODETERMINATA



$\begin{cases} n = 6 \\ m = 6 \\ k_0 = 5 \leftarrow \text{una riga dip.} \end{cases}$

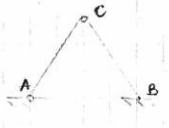
B) $V = G \Rightarrow n = m$ e $k_0 = m = n$

ammette sol. nulla
CINEMATICAMENTE ISODETERMINATA



C) $V > G \rightarrow n > m$ e $k_0 = m$

ammette sol nulla
CINEMATICAMENTE IPERDETERMINATA



Confronto m e k_0 per verificare l'efficienza della disposizione dei vincoli

VINCOLO	a terra	su asta (libera)
incastro	3	3
cerniera	2n	2(n-1)
carrello	2n-1	1 se n=1 ; 2n-3 se n≥2

n = n° aste vincolate.

TABELLA per calcolo Gradi di Vincolo.