MASTER COPY
Tel. 050 6312126
Cell. 388 9337745

SEGNALI ALEATORI

DISPOSIZIONI SEMPLICI DI CLASSE K: $(K \le m)$ $D_{m,K} = \frac{m!}{(m-K)!}$ (RAGGRUPPAMENTI DI K el SI DIFFERENZIANO PER UN ELEMENTO O PER L'ORDINE DI DISPOSIZIONE DEGL'el)

PERMUTAZIONI SEMPLICI: $P_m = D_{m,m} = m!$ $(K \le m)$

DISPOSIZIONE CON RIPETIZIONE DI CLASSE K: $D^*_{m,K} = m^K$ (RAGGRUPPAMENTI DI K el. SI DIFFERENZIANO PER UN ELEMENTO E/O PER L'ORDINE, MA DOVE SONO AMMESSE LE RIPETIZIONI DI OGNI ELEMENTO)

COMBINAZIONI SEMPLICI DI CLASSE K: $C_{m,K} = \frac{m!}{K!(m-K)!} = \binom{m}{K}$ $(K \le m)$ (N° DI RAGGRUPPAMENTI DI DIMENSIONE K ELEMENTI CHE DIFFERENZIANO DA 1 el [NON CONTA L'ORDINE])

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE DI CLASSE K: $C^*_{m,K} = \frac{(m+K-1)!}{K!(m-1)!} = \binom{m+K-1}{K}$ (UGUALE A PRIMA, MA CON LA POSSIBILITÀ DI RIPETIZIONI DI UN ELEMENTO)

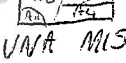
TEOREMA DELLA PROBABILITÀ

- **SPAZIO CAMPIONE** = INSIEME DEI RISULTATI POSSIBILI DELL'ESPERIMENTO: Ω
- **PROVA** = OGNI RIPETIZIONE DELL'ESPERIMENTO
- **EVENTO** = UN INSIEME DI RISULTATI: A (OGNI EVENTO È UN SOTTOINSIEME DELLO SPAZIO CAMPIONE)



- **RISULTATI FAVOREVOLI ALL'EVENTO:** ELEMENTI DELL'EVENTO A
- **EVENTO ELEMENTARE** = EVENTO COMPOSTO DA UN SOLO ELEMENTO
- **EVENTO IMPOSSIBILE** = $A = \{\emptyset\}$ • **EVENTO CERTO** = $A \equiv \Omega$
- LA FAMIGLIA (O CLASSE) DEGLI EVENTI È UN CAMPO DI BOREL $\rightsquigarrow \mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \Rightarrow$ CAMPO DI BOREL: $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A \in \mathcal{F}$, $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = B \in \mathcal{F}$

- **FREQUENZA RELATIVA** DI UN EVENTO $\rightsquigarrow f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$ (CON n = N° DI PROVE E $n(A)$ = PROVE CON RISULTATO FAVOREVOLE A)
  - PROPRIETÀ: $f(\Omega) = 1$; $f(A) \ge 0$; $f(A+B) = f(A) + f(B)$ (SOLO SE A e B DISGIUNTI, CIOÈ $A \cdot B = \emptyset$)
  - $f\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f(A_i) = f(\Omega) = 1$ (SE A_i È UNA PARTIZIONE DI Ω, CIOÈ $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ E $A_i A_j = 0 \ \forall i \ne j$)



PROBABILITÀ IN MANIERA ASSIOMATICA [LA PROBABILITÀ È UNA MISURA DEGLI EVENTI]

$P(\Omega) = 1$; $P(A) \le 1$; $P\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$ SE $A_i A_j = 0 \ \forall i \ne j$

SPAZIO DI PROBABILITÀ: $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, SE Ω È FINITO $\Rightarrow \mathcal{S}(\Omega, P(\omega_i))$ (EVENTI ELEMENTARI)

MODELLO DI PROBABILITÀ UNIFORME [Hp: Ω COMPOSTO DA K ELEMENTI

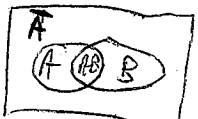
SE LA PROBABILITÀ DI TUTTI GLI EVENTI ELEMENTARI SONO UGUALI TRA LORO $= P(\omega_i) = \frac{1}{K}$, ALLORA UN CERTO EVENTO A CON K_A EVENTI ELEMENTARI $\Rightarrow P(A) = \frac{K_A}{K}$

COROLLARI DEGLI ASSIOMI

- SE A È UNA PARTIZIONE DI $\Omega \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} P(A_i) = 1$



- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \rightsquigarrow A + \bar{A} = 1$
- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\emptyset) = \emptyset$ (EVENTO IMPOSSIBILE)



- $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \rightsquigarrow$ DIM $A+B = A + \bar{A}B$ QUINDI $P(A+B) = P(A) + P(\bar{A}B)$; $B = AB + \bar{A}B \rightsquigarrow P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$ QUINDI $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- $P(A) \ge P(B)$ SE $A \supset B$ DIM $\rightsquigarrow P(A) = P(B) + P(\bar{B}A) \ge P(B)$



PROBABILITÀ CONGIUNTA $A, B \in \Omega$

- $P(AB)$ = PROBABILITÀ DEL VERIFICARSI CONGIUNTAMENTE E CONTEMPORANEAMENTE DEGLI EVENTI A e B
- PROBABILITÀ CONGIUNTA DI m EVENTI $\rightsquigarrow P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_m) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA $A, B \in \Omega$ E $P(B) \ne 0$

$\rightarrow B$ = EVENTO CONDIZIONANTE

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$\rightsquigarrow$ È LA PROBABILITÀ CHE ASSUME L'EVENTO A, UNA VOLTA CHE SI È GIÀ VERIFICATO L'EVENTO B

(SI SCALA DI $\frac{1}{P(B)}$ PERCHÉ L'EVENTO B, GIÀ VERIFICATO, DIVENTA UNA SORTA DI NUOVO SPAZIO CAMPIONE, QUINDI SI RINORMALIZZA)

A CONDIZIONATO B

($P(A) \rightsquigarrow$ PROBABILITÀ A PRIORI; $P(A|B) \rightsquigarrow$ PROBABILITÀ A POSTERIORI, DATO B)

CASI PARTICOLARI: • SE $A \cdot B = \emptyset$ (DISGIUNTI) $\Rightarrow P(A|B) = 0$ NOTE: $\Rightarrow P(B|B) = 1$

• SE $A \subset B \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$ $\Rightarrow P(A|B) \neq P(B|A)$ TRANNE QUANDO $P(A) = P(B)$

• SE $B \subset A \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

FATTORIZZAZIONE DI PROBABILITÁ CONGIUNTE

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \rightarrow P(AB) = P(B|A) \cdot P(A)$

$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cdots A_{n-1}) = P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdots A_{n-2}) \cdot P(A_1 \cdots A_{n-2}) \Rightarrow$ ITERANDO

$\Rightarrow P(A_1 \cdots A_n) = P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdots A_{n-2}) \cdot P(A_{n-2} | A_1 \cdots A_{n-3}) \cdots P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$

SE DUE EVENTI SONO INDIPENDENTI: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, DA CUI $P(A|B) = P(A)$, ALLORA $\Rightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A|B) P(B) \Rightarrow P(A|B) = P(A) \\ P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B) \end{cases}$

(n EVENTI SONO INDIPENDENTI SE $\begin{cases} P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) \\ P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j \end{cases}$)

PROPRIETÁ: • A, B INDIPENDENTI $\Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

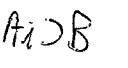
• A, B, C INDIPENDENTI $\Rightarrow$ A E BC INDIPENDENTI $\Rightarrow P(A(BC)) = P(A)P(BC)$

• A, B, C INDIPENDENTI $\Rightarrow$ A E (B+C) INDIPENDENTI $\Rightarrow P(A(B+C)) = P(A)P(B+C)$

• A E B DISGIUNTI E C INDIPENDENTE DA A E DA B $\Rightarrow$ (A+B) E C INDIPENDENTI $\Rightarrow P(C(A+B)) = P(C)P(A+B)$

TEOREMA DELLA PROBABILITÁ TOTALE: SIA $B \in \Omega$ E $A_1, A_2 \cdots A_n$ UNA PARTIZIONE DI Ω

$B = A_1 B + A_2 B + \cdots + A_n B$ (CON GLI $A_n B$ DISGIUNTI) $\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$



• IL TEOREMA VALE LO STESSO ANCHE $A_1, \cdots, A_n$ NON È UNA PARTIZIONE DI Ω, PURCHÉ $\sum_{i=1}^{n} A_i \supset B$ E CHE $A_i A_j \neq \emptyset \quad \forall i \neq j$



TEOREMA DI BAYES

SICCOME $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) \Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)} \\ P(B|A) = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A)} \end{cases}$ INFATTI $P(B|A) = P(A|B)$ SOLO SE $P(A) = P(B)$

TEOREMA DI BAYES GENERALIZZATO

$A_1, \cdots, A_n$ PARTIZIONE DI $\Omega \Rightarrow P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$

IN GENERALE

$P(A|\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{B})$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

ESPERIMENTO COMPOSTO DI n ESPERIMENTI

• SPAZIO CAMPIONE DELL'ESPERIMENTO COMPOSTO $\Rightarrow \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ (PRODOTTO CARTESIANO)

DOVE Ω_i È LO SPAZIO CAMPIONE DELL'ESPERIMENTO i-ESIMO

• RISULTATO ELEMENTARE DELL'ESPERIMENTO COMPOSTO $\Rightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ DOVE ξ_i È IL RISULTATO DELL'ESPERIMENTO i-ESIMO

• UN GENERICO EVENTO $A \in \Omega \Rightarrow A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$ • LA CLASSE DEGLI EVENTI $\mathcal{F} \in \Omega \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$

• COMPOSIZIONE DI ESPERIMENTI COSTITUITI DA CAMPIONI CON NUMERO FINITI DI ELEMENTI

$\Omega_1 = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] \Rightarrow$ K È LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO CAMPIONE DEL PRIMO ESPERIMENTO

$\Omega_2 = [\eta_1, \cdots, \eta_m] \Rightarrow$ m $\cdots$ " " " " SECONDO "

$\Rightarrow \Omega$ È L'INSIEME DI TUTTE LE COPPIE ORDINATE $(\xi_i, \eta_j) \quad \forall i, j$ DA $1 \div K(m)$

$\Rightarrow P(\xi_i, \eta_j)$ È QUANDO ESCONO CONGIUNTAMENTE ENTRAMBI I RISULTATI $\Rightarrow P(\xi_i, \eta_j) = P(\xi_i | \eta_j) P(\eta_j) = P(\eta_j | \xi_i) P(\xi_i)$

• COMPOSIZIONE DI DUE ESPERIMENTI

• COMPOSIZIONE DI TRE ESPERIMENTI:

$\Omega_1 = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_K)$

$\Omega_2 = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)$ $\Rightarrow \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$

$\Omega_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

EVENTO ELEMENTARE $\Rightarrow$ I 3 ESPERIMENTI CONGIUNTAMENTE $\Rightarrow (\xi_i, \eta_j, \lambda_n)$

$\Rightarrow P(\xi_i, \eta_j, \lambda_n) = P(\xi_i | (\eta_j, \lambda_n)) \cdot P(\eta_j | \lambda_n) \cdot P(\lambda_n)$

• COMPOSIZIONE DI ESPERIMENTI INDIPENDENTI

• 2 ESPERIMENTI

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$A = A_1 \times A_2$

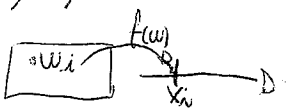
$A_1 = A_1 \times \Omega_2$ INDIPENDENTE DA $A_2 = \Omega_1 \times A_2$

$\Rightarrow \begin{cases} P(A_1 \times \Omega_2) = P(A_1) \\ P(\Omega_1 \times A_2) = P(A_2) \end{cases} \Rightarrow P(A) = P(A_1 \times A_2) = P(A_1 \times \Omega_2) \cdot P(\Omega_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$

• n ESPERIMENTI → $\begin{cases}\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \\ A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\end{cases} \Rightarrow P(A) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i)$

• PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE ↝ ESPERIMENTO $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$; SIA A UN EVENTO DI Ω $P(A) = p$ E $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = q$. SI RIPETA L'ESPERIMENTO n VOLTE IN MANIERA INDIPENDENTE UNA DALL'ALTRA $\Omega = \Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega$ n VOLTE. EVENTO $\mathcal{E} = (\text{ESCA K VOLTE L'EVENTO A SULLE n PROVE INDIPENDENTI})$; EVENTO $\mathcal{E}_1 = (\text{ESCA K VOLTE A NEI PRIMI K ESPERIMENTI}) = (\overbrace{A, A, \ldots A}^{K}, \overbrace{\bar{A}, \bar{A}, \ldots \bar{A}}^{n-K})$
$\Rightarrow P(\mathcal{E}_1) = \overbrace{p \cdot p \cdots p}^{K \text{ volte}} \cdot \overbrace{q \cdot q \cdots q}^{n-K \text{ volte}} = p^K q^{n-K}$, EVENTO $\mathcal{E}_i = (\text{ESCA K VOLTE A IN K DETERMINATE POSIZIONI, ESPERIMENTI, SULLE n PROVE INDIPENDENTI}) = (A, A, \bar{A}, \bar{A}, \overset{(1)}{A}, \bar{A}, \overset{(2)}{A}, \ldots \bar{A})$ CON $i = 1, 2, \ldots, C_{n,K} = \binom{n}{K}$

$\Rightarrow P(\mathcal{E}) = P\left(\sum_{i=1}^{C_{n,K}} \mathcal{E}_i\right) = \sum_{i=1}^{C_{n,K}} P(\mathcal{E}_i) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{K!(n-K)!} p^K q^{n-K}$



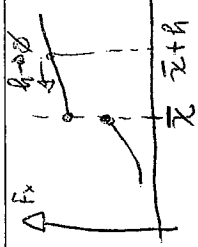
VARIABILE ALEATORIA ↝ SI DEFINISCE UNA V.A. X, L'INSIEME DEI NUMERI REALI OTTENUTI DAGLI ELEMENTI ω_i DELLO SPAZIO CAMPIONE Ω MEDIANTE UNA REGOLA DI CORRISPONDENZA $f(\omega)$ CHE SODDISFI LE SEGUENTI CONDIZIONI:
• $f(\omega)$ È UNA REGOLA DI CORRISPONDENZA AD UN SOLO VALORE
• L'INSIEME DEGLI ω PER CUI $f(\omega) \leq x_i$ RAPPRESENTA UN EVENTO PER OGNI NUMERO REALE x_i QUINDI È ASSOCIATA LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO $[X : X \leq x_i]$
• LA PROBABILITÀ DEGLI EVENTI $[f(\omega) = \pm\infty]$ È NULLA, CIOÈ, POSSONO $\exists\, \omega : f(\omega) = \pm\infty$ (MA QUESTI HANNO PROBABILITÀ NULLA)

• SPAZIO DI PROBABILITÀ INDOTTO ↝ ATTRAVERSO $f(\omega)$, LO SPAZIO DI PROBABILITÀ $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ SI PUÒ TRASFORMARE IN INDOTTO
  - LO SPAZIO CAMPIONE È L'INSIEME DEI $\mathbb{R}$
  - LA CLASSE DEGLI EVENTI È UN CAMPO DI BOREL CHE CONTIENE TUTTI GLI INTERVALLI INFERIORMENTE ILLIMITATI E SUPERIORMENTE CHIUSI ↝ $\{-\infty < X \leq x\}$ CON $x \in \mathbb{R}$
  - LA FUNZIONE DI PROBABILITÀ È SPECIFICATA QUANDO VIENE ASSEGNATA LA PROBABILITÀ DEL GENERICO EVENTO

OSS: $[x_1 < X \leq x_2] = [-\infty < X \leq x_2] - [-\infty < X \leq x_1] \Rightarrow x_2 > x_1$
↝ $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot)) \Rightarrow \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}, (-\infty < X \leq x], P[-\infty < X \leq x]\right)$ ← SPAZIO DI PROBABILITÀ INDOTTO

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DELLA V.A. X (x VARIABILE INDIPENDENTE)
$F_X(x) \triangleq P[-\infty < X \leq x]$ ↝ QUESTA È UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE → $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$

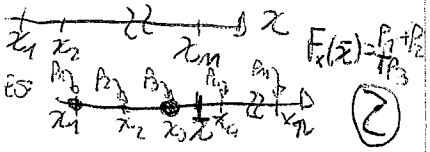
PROPRIETÀ:
• $0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad \forall x$
• $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ SE $x_2 > x_1$
• $F_X(x)$ È UNA FUNZIONE MONOTONA NON DECRESCENTE ↝ $x_2 > x_1 \Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$
• $F_X(-\infty) = P[-\infty < X \leq -\infty] = \emptyset$ • $F_X(+\infty) = P[-\infty < X \leq +\infty] = \Omega = 1$
• $F_X(x)$ È CONTINUA A DESTRA $\Rightarrow F_X(x) = F_X(x^+) \triangleq \lim_{h \to 0} F_X(x+h) \quad (h > 0)$
• SE $F_X(x)$ PRESENTA PER $x = \bar{x}$ UNA DISCONTINUITÀ DI I^A SPECIE, ALLORA $P[X = \bar{x}] = F_X(\bar{x}^+) - F_X(\bar{x}^-)$



DIM: $P[-\infty < X \leq \bar{x} + h] = P[-\infty < X \leq \bar{x} - h] + P[\bar{x} - h < X \leq \bar{x} + h]$ ↝ $F_X(\bar{x}+h) = F_X(\bar{x}-h) + P[\cdot]$
FACENDO IL LIM PER $h \to \emptyset \Rightarrow P[\bar{x} < X \leq \bar{x}] = F_X(\bar{x}^+) - F_X(\bar{x}^-)$ C.V.D.

OSS: SE $F_X(x)$ È CONTINUA $\Rightarrow P[X = \bar{x}] = \emptyset$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE
$X = x_i$ CON $x_i \in \mathbb{R}$ E $i = 1, 2, \ldots, n$ CON n $\begin{cases}\text{FINITO} \\ \text{INFINITO}\end{cases}$



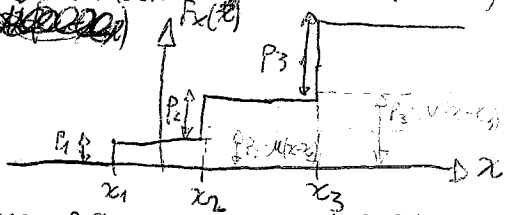
• MASSA DI PROBABILITÀ: $p_i \triangleq P[X = x_i] \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$

- FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA V.A. DISCRETA

$$F_X(x) \triangleq P[-\infty < X \le x] = P[X \le x] = \sum_{\lambda_i : x_i \le x} P[X \le x_i] = \sum_{\lambda_i : x_i \le x} p_i$$

(GRADINO UNITARIO SPOSTATO DI x_i = $u(x-x_i)$)

$$\Rightarrow F_X(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} p_i \cdot u(x-x_i) \rightsquigarrow \text{DIVENTA UNA FUNZIONE COSTANTE A TRATTI}$$



VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

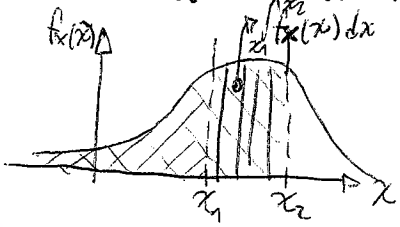
X È UNA V.A. CONTINUA SE PUÒ ASSUMERE INFINITI VALORI REALI CIASCUNO CON PROBABILITÀ NULLA $\rightsquigarrow P[X=x]=0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F_X(x)$ È CONTINUA E DERIVABILE

$$P[x_1 < X < x_2] = P[x_1 \le X < x_2] = P[x_1 < X \le x_2] = P[x_1 \le X \le x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$\rightsquigarrow F_X(x) \triangleq P[X \le x] = P[X < x]$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ $\Rightarrow f_X(x) \triangleq \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

($f_X(x)$ PUÒ ANCHE ESSERE DEFINITA SU UN DOMINIO CORRISPONDENTE AD UN INTERVALLO, UN INSIEME DI INTERVALLI, UN INSIEME DI PUNTI DELL'ASSE REALE. $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$ = DIFFERENZA DI $F_X(x)$)

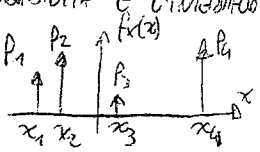


↳ PROPRIETÀ:
- $f_X(x) \ge 0$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} f_X(x)\,dx$ (SE $\bar{x} = -\infty \Rightarrow F_X(\bar{x}) = 0$)
- $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,dx$
- PROPRIETÀ DI NORMALIZZAZIONE $\rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$
- 2ª PROPRIETÀ IN FORMA DIFFERENZIALE:

$$P[\bar{x} \le X \le \bar{x}+dx] = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+dx} f(x)\,dx \simeq f_X(\bar{x})\,dx \Rightarrow f_X(\bar{x})\,dx = P[\bar{x} \le X \le \bar{x}+dx]$$

- VARIABILE ALEATORIA DEFINITA IN UN INTERVALLO, VUOL DIRE CHE LA SUA DENSITÀ DI PROBABILITÀ SARÀ DIVERSA DA 0 IN QUELL'INTERVALLO. OVVERO IL DOMINIO DELLA DENSITÀ DI PROBABILITÀ È L'INTERVALLO
- DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI UNA V.A. DISCRETA

Siccome $\delta(x) \triangleq \dfrac{d}{dx} u(x)$ (DELTA DI DIRAC) $\Rightarrow f_X(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} p_i\, \delta(x-x_i)$



- X È UNA V.A. MISTA QUANDO È CONTINUA A TRATTI E PRESENTA DISCONTINUITÀ DI I^a SPECIE

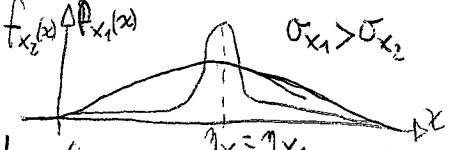
INDICI DI UNA VARIABILE ALEATORIA

- VALOR ATTESO = VALOR MEDIO $\rightsquigarrow \eta_X \triangleq E[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$ (RAPPRESENTA IL "BARICENTRO" DELLA DENSITÀ DI MASSA)
- DOVE E = OPERATORE DI ASPETTAZIONE, CHE HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:
  - È LINEARE $\rightsquigarrow E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
  - $E[cX] = cE[X] \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} cx f_X(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$
  - $E[c] = c \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} c f_X(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = c$
- VALOR MEDIO DI UNA V.A. DISCRETA

(PROPRIETÀ CAMPIONATRICE DELLA DELTA DI DIRAC: $\ell(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x)\,\delta(x-x_i)\,dx \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x_i)\,\delta(x-x_i)\,dx$)

$$\eta_X \triangleq E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{\lambda=1}^{n} p_i\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum_{\lambda=1}^{n} p_i \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum_{\lambda=1}^{n} p_i \int_{-\infty}^{+\infty} x_i\,\delta(x-x_i)\,dx$$

$$\Rightarrow \eta_X = \sum_{\lambda=1}^{n} p_i x_i$$



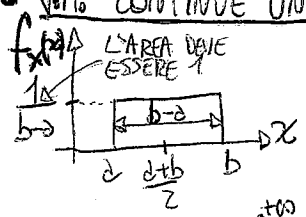
- VARIABILE ALEATORIA SCARTO: $L_X \triangleq X - \eta_X$
- VARIANZA $\rightsquigarrow \sigma_X^2 \triangleq E[(X-\eta_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_X)^2 f_X(x)\,dx$ ("VALORE QUADRATICO MEDIO DELLO SCARTO")
- DEVIAZIONE STANDARD $\rightsquigarrow \sigma_X \triangleq \sqrt{\sigma_X^2}$ ("INDICE DI DISPERSIONE")

- VALORE QUADRATICO MEDIO DELLA V.A. $X \rightsquigarrow \Psi_x \triangleq E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx$
(INFATTI $\sigma_x^2 = E[L_x^2]$)
- RELAZIONE TRA GLI INDICI $\rightsquigarrow \sigma_x^2 = E[(X-\eta_x)^2] = E[X^2 + \eta_x^2 - 2X\eta_x] = E[X^2] + E[\eta_x^2] - E[2\eta_x X] =$
$= \Psi_x + \eta_x^2 - 2\eta_x E[X] \Rightarrow \sigma_x^2 = \Psi_x - \eta_x^2$
- PER UNA V.A. DISCRETA $\rightsquigarrow f_x(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i\,\delta(x-x_i) \Rightarrow \begin{cases} \Psi_x = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 \\ \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i [x_i - \eta_x]^2 \end{cases}$

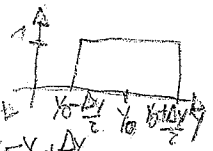
TEOREMA DI BIENAYMÉ - CHEBYSHEV
DATA UNA VARIABILE ALEATORIA X CON VARIANZA FINITA σ_x^2 $\forall K > 1$ SI HA CHE: $P[|L_x| \geq K\sigma_x] \leq \frac{1}{K^2}$ OVVERO $P[-K\sigma_x \leq L_x \leq K\sigma_x] > 1 - \frac{1}{K^2}$
PONENDO $K = \frac{\varepsilon}{\sigma_x}$ (con $\varepsilon > \sigma_x$) $\Rightarrow P[-\varepsilon < L_x < \varepsilon] > 1 - \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon}$
TEOREMA VARIANZA NULLA: SE LA VARIANZA σ_x^2 DI X È NULLA ALLORA LA $P[X = \eta_x] = 1 \Rightarrow f_x(x) = \delta(x-\eta_x)$

MODELLI DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI V.A. CONTINUE

- V.A. CONTINUE UNIFORMI $\rightsquigarrow X \in \mathcal{U}[a,b]$ $(b>a) \Rightarrow f_x(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathrm{rect}\left[\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a}\right]$



$\mathrm{rect}\left(\frac{y-y_0}{\Delta y}\right) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{ALTROVE} \\ 1 & \text{SE } \frac{|y-y_0|}{\Delta y} \leq \frac{1}{2} \rightsquigarrow -\frac{\Delta y}{2} \leq y - y_0 \leq \frac{\Delta y}{2} \rightsquigarrow y_0 - \frac{\Delta y}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{\Delta y}{2} \end{cases}$



$\Rightarrow F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx \rightsquigarrow$



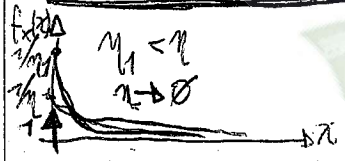
$= F_x(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{PER } a \leq x \leq b \\ = 0 & \text{PER } x < a \\ = 1 & \text{PER } x > b \end{cases}$

$\Rightarrow \eta_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx \rightsquigarrow \eta_x = \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow \Psi_x = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx \rightsquigarrow \Psi_x = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$

$\Rightarrow \sigma_x^2 = E[(X-\eta_x)^2] = \Psi_x - \eta_x^2 \rightsquigarrow \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

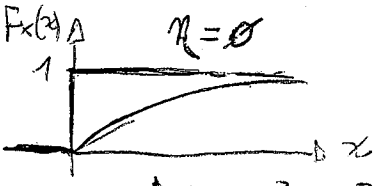
- V.A. ESPONENZIALI NEGATIVE $\rightsquigarrow X \in \mathcal{E}(\eta)$ $(\eta > 0) \Rightarrow f_x(x) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{x}{\eta}} \cdot u(x)$





$\eta \to 0 \rightsquigarrow$ DELTA $\rightsquigarrow$ AREA $= 1$
$\eta \to \infty \rightsquigarrow$ COSTANTE DI AMPIEZZA INFINITESIMA MA DURATA INFINITA $\rightsquigarrow$ AREA $= 1$

$\Rightarrow F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\alpha)\,d\alpha = \begin{cases} x < 0 \rightarrow F(x) = 0 \\ \int_0^x \frac{1}{\eta} e^{-\frac{\alpha}{\eta}}\,d\alpha \rightarrow F(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{\eta}}\right) u(x) \end{cases}$



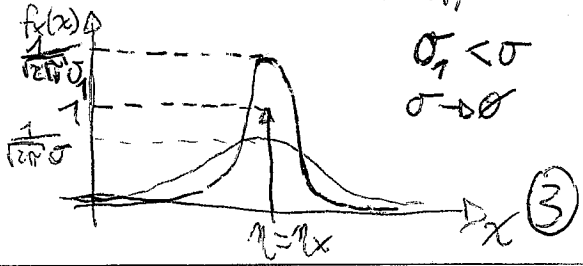
$\Rightarrow \eta_x = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\eta} e^{-x/\eta}\,dx \rightsquigarrow \eta_x = \eta$

$\Rightarrow \Psi_x = \sigma_x^2 + \eta_x^2 = 2\eta_x^2 = 2\eta^2$

$\Rightarrow \sigma_x^2 = E[(x-\eta_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 \frac{1}{\eta} e^{-x/\eta} u(x)\,dx \rightsquigarrow \sigma_x^2 = \eta^2 \rightsquigarrow \sigma_x = \eta$

TEMPO DI VITA DI UN DISPOSITIVO $\rightsquigarrow T \in \mathcal{E}(\eta_T)$ DOVE η_T = TEMPO DI VITA MEDIO
SVOLGENDO $F_T(\alpha) = \left(1 - e^{-\alpha/\eta_T}\right) u(\alpha) \Rightarrow P[t_0 \leq T \leq t_0 + t] = F_T(t_0 + t) - F_T(t_0) = \left[1 - e^{-\frac{(t_0+t)}{\eta_T}}\right] - \left(1 - e^{-t_0/\eta_T}\right)$
$\rightsquigarrow e^{-\frac{t_0}{\eta_T}}\left[1 - e^{-t/\eta_T}\right] \rightsquigarrow$ (LA V.A. ESPONENZIALE NEGATIVA È SENZA MEMORIA)

VARIABILI ALEATORIE GAUSSIANE O NORMALI
$X \in \mathcal{N}(\eta, \sigma^2) \Rightarrow f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$
$\Rightarrow \eta_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx \rightsquigarrow \eta_x = \eta$
$\Rightarrow \sigma_x^2 = E[(x-\eta)^2] = \sigma^2 \Rightarrow \sigma_x = \sigma$



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745