VETTORI

PUNTO MATERIALE: Corpo considerato puntiforme in quanto è molto piccolo rispetto all'ambiente nel quale si studia.

POSIZIONE PTO. MATERIALE: Tre informazioni

$\vec{OP} = (x_p, y_p, z_p)$

La lunghezza (modulo) $\longrightarrow$ $|\vec{OP}| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$

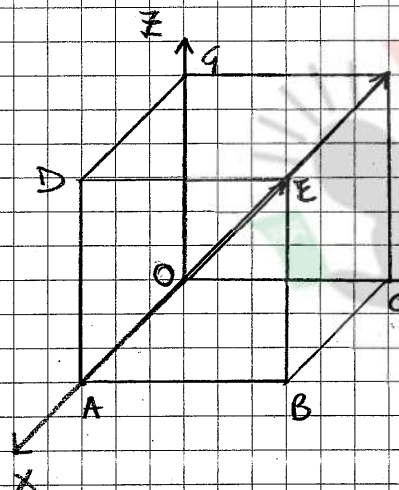
VERSORI: modulo unitario, una direzione e verso

$\hat{i} = (1,0,0)$ $\quad \hat{j} = (0,1,0)$ $\quad \hat{k} = (0,0,1)$

PRODOTTO SCALARE:

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$
$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\vartheta = \vec{a} \cdot \vec{b}$



Trovare $\vec{v} = \vec{AF}$, $\vec{e} = \vec{OE}$

$AF = \vec{OF} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L \\ L \\ L \end{pmatrix}$

Devo cercare di ritrovare i vettori in O.

$|\vec{AF}| = \sqrt{L^2 + (L\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}L$

$\vec{OE} = \begin{pmatrix} L \\ L \\ L \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{OE}| = \sqrt{3}L$

L'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{e}$ $\Rightarrow$ $|\vec{v}| \cdot |\vec{e}| \cos\vartheta = \vec{v} \cdot \vec{e}$

$\hookrightarrow \sqrt{3}L \cdot \sqrt{3}L \cos\vartheta = L^2$ $\quad \begin{pmatrix} -L \\ L \\ L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ L \\ L \end{pmatrix} = -L^2 + L^2 + L^2$

$\cos\vartheta = 1/3$

PRODOTTO VETTORIALE:

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$
$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$|\vec{a}||\vec{b}| \sin\vartheta = \vec{a} \wedge \vec{b}$

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 987 7745

Dato $\vec{a} = (1, -1, h)$ e $\vec{b} = (2, h, -h)$

↳ $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ h \\ -h \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 2 - h - h^2 = 0 \quad \Big| \Delta = 1 + 8 = 9 \Big| \quad h_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

↳ $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$S\vec{a} = \vec{b}$

↳ $\begin{cases} S \cdot 1 = 2 \rightarrow S = 2 \\ S \cdot -1 = h \rightarrow h = -2 \\ S \cdot h = -h \rightarrow h = 0 \end{cases} \quad S = \{\emptyset\}$

VELOCITA' / ACCELERAZIONE SCALARE MEDIA / ISTANTANEA

$$v_s^m(t_1, t_2) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \Delta t = t_2 - t_1 > 0$$

$$v_s(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$a_s^m(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \Delta t = t_2 - t_1 > 0$$

$$a_s(t) = \frac{dv_s}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_s(t + \Delta t) - v_s(t)}{\Delta t}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

CINEMATICA DEL PUNTO

LEGGE ORARIA: insieme delle relazioni che assegnano in funzione del tempo le coordinate del punto in movimento

TRAIETTORIA: posizioni occupate dal punto nel tempo

MOTO RETTILINEO UNIFORME

Moto su una traiettoria rettilinea con velocità costante

$v_s = v_0 \rightarrow$ COSTANTE

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

x_0: ascissa della posizione iniziale

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Caratterizzato da una traiettoria rettilinea + $a_x = a_0 = cost.$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \end{cases}$$!

Da queste posso ricavarmi t, l:

$$I \rightarrow t = \frac{v - v_0}{a_0}$$

$$I \rightarrow l = x(t) - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_0}$$

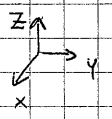
Se $v_0 = 0$

$v = \sqrt{2al} \leftarrow v = a_0 t$ e $l = \frac{1}{2} a_0 t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a_0}}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MOTO DI CADUTA LIBERA DEI CORPI

$\vec{a}_0 = \vec{g} \rightarrow 9{,}8\ m/s^2 \parallel a_x = 0,\ a_y = 0,\ a_z = -g$



Il moto di P_z è uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} v_z(t) = v_{0z} - gt \\ z(t) = z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \parallel$$!

(ES) Un corpo lasciato libero di cadere con velocità iniziale nulla ad altezza h dal suolo, raggiunge il suolo dopo un Tempo:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad v_F = \sqrt{2gh}$$

(ES) Un corpo lanciato verticalmente verso l'alto raggiunge come quota max: $h = \frac{v_0^2}{2g}$

in un tempo: $\tau = \frac{v_0}{g}$

MOTO PARABOLICO

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + v_{0x}\, t \\ Z(t) = Z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

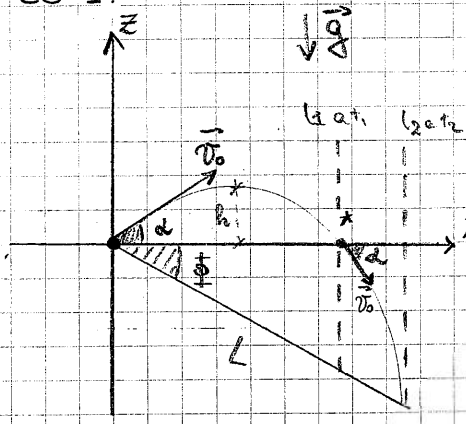
(Rett. Uniforme; Rett. Unif. Accelerato)

Se lancio qualcosa con velocità v_0 dall'origine con α

$$\begin{cases} X(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ Z(t) = (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ES 1.

TESTO: sciatore che vola, trovare α affinché L sia max



Essendo un moto parabolico ho un moto rett. uniforme su x e un moto unif. accelerato su z.

h è il pto. centrale di Ol_1, e il più alto.

In h ho $v_z = 0 \rightarrow \perp$ all'asse z.

Da 0 a l_1 ho:

X] $v = v_0 \cos\alpha$

Z] $v = v_0 + at \rightarrow 0 = v_0 \sin\alpha - gt$

$v_0 \sin\alpha = gt$

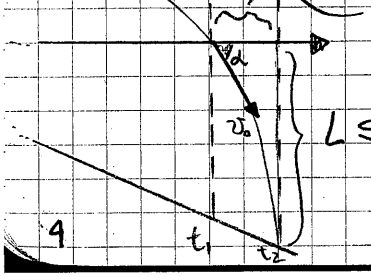
$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ ‖ Tempo per arrivare da 0 a h

$t_1 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$ ‖ Tempo per arrivare da 0 a l_1

Dato che $X(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t$ allora in questo caso ho

$X(t_1) = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 \rightarrow v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

L = gittata $= 2 \frac{v_0^2}{g} \cos\alpha \sin\alpha$



‖ ZOOM SUL DISEGNO

$$\begin{cases} L \sin\Phi = V_0 \sin\alpha\, t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 & \text{(Z)} \to \text{MOTO UNIF. ACC.} \\ L\cos\Phi - 2\frac{v_0^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha = v_0\cos\alpha \cdot t_2 & \text{(X)} \to \text{MOTO RETT. UNI} \end{cases}$$

NOTA:

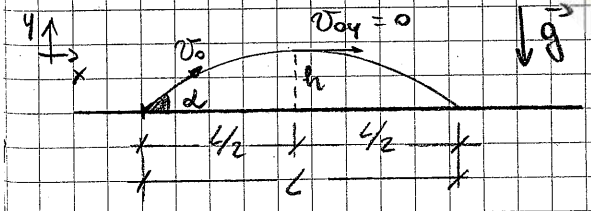
- Scrivo $L\cos\Phi - X(t_1)$ in quanto $L\cos\Phi = X(t_1) + X(t_2)$
- Considero sin/cos perché L sta angolato
- Nel moto su Z ho $S_0 = 0$ perché parto da 0
- Nell'ultimo sistema considero $+\frac{1}{2} g t_2^2$ e nel precedente $-\frac{1}{2} g t_1^2$ perché nel precedente il moto è opposto a $\vec{g}$ (salita) mentre nell'ultimo è concorde (discesa).

Risolvo il sistema

$$\begin{cases} L \sin\Phi = v_0 \sin\alpha\, t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 \\ \frac{L\cos\Phi}{v_0\cos\alpha} - 2\frac{v_0^2}{g}\cancel{\cos\alpha}\sin\alpha = \cancel{v_0}\cancel{\cos\alpha}\cdot t_2 \end{cases}$$

Mi ricavo quindi t_2 e vado a sostituirla nella prima. Alla fine avrò un'eq. del tipo $\Rightarrow L = \dots(\alpha)$ in funzione di α. A quel punto derivo $\left(\frac{dL}{d\alpha}\right)$ e guardo dov'è il punto di massimo.

ES. CHIARIFICATORE



$$\vec{x} = \begin{cases} L = v_0\cos\alpha \cdot t \\ v_0\cos\alpha = \text{COSTANTE} \end{cases}$$

$$\vec{y} = \begin{cases} 0 = v_0\sin\alpha - g\frac{t}{2} \\ h = v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g\left(\frac{t}{2}\right)^2 \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745