**SISTEMI DINAMICI** = evolvono la loro configurazione nel Tempo. Quelli di maggior comprensione sono quelli descritti mediante **EQUAZIONI DIFFERENZIALI** ⇒ si parlerà di sistemi che evolvono in **TEMPO CONTINUO**

le grandezze variano in maniera continua nel Tempo

Nei **SISTEMI TEMPO-DISCRETO** → la grandezza che si va a misurare è osservabile solo in determinati momenti
↳ in questi utilizzo il metodo delle differenze finite.

Studieremo sistemi di eq. differenziali d'ordine n del tipo:

$$F(y(t), Dy(t), \dots, D^n y(t), u(t), Du(t), \dots, D^p u(t), t) = 0$$

lo stesso non presente con l'ordine di derivazione maggiore

in cui:

- $t$ = variabile indipendente $t \in \mathbb{R}$
- $D$ = operatore differenziale Totale rispetto a $t$ — $D^k(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t)$ → sistemi a TC
- $u(t)$ = Terme forzante ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, numerazione $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$) — $u(t)$ serve per ingressi

Se il modello è **BEN POSTO** (se sono definite in maniera esatta le condizioni iniziali date per y delle prime n-1 derivate e di u delle sue prime p-1 derivate) ↑ variabile di uscita

è sempre possibile ricavarlo in **FORMA NORMALE**:

$$D^n y = F(y, \dots D^{n-1} y, u, \dots, D^p u, t)$$

Sotto ipotesi tra cui quella fondamentale $n \geq p$ si può ricondurre questa eq. d'ordine n ad un sistema di n equazioni del 1° ordine

$$\Rightarrow \quad Dx(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Dove con la notazione vettoriale si esprime $\Rightarrow f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

n° eq. diff di ordine 1 — VARIABILI DI STATO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Le condizioni iniziali sono date dai valori a $t_0 \to x(t_0) = x_0 \Rightarrow$ che verifica la nostra eq. $\forall t$

↓

è possibile Trovare allora la soluzione $y(t) = h(x(t), u(t), t)$

Possiamo riscrivere quindi:

$$\begin{cases} Dx(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

## SISTEMI IN FORMA DI STATO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Nel caso $p = \phi$ → ho un ingresso

$$\Rightarrow \quad D^n y = F(y, Dy, D^{n-1} y, u, t)$$

Basta porre il vettore variabile di stato x assumendo ad ogni variabile di stato un valore fino allo derivato $n-1$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ Dy \\ \vdots \\ D^{n-1}y \end{bmatrix} \Rightarrow Dx = \begin{bmatrix} Dx_1 \\ \vdots \\ Dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ F(x,u,t) \end{bmatrix} = f(x,u,t)$$

$\Rightarrow$ $u \geq 0$ numero cont. pure

Nel caso più generale ci si trova di fronte ad un sistema di $n$ equazioni del $1^{\circ}$ ordine e più complesso

Posso anche avere la forma più compatta (matriciale)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} u \quad \Big\| \longrightarrow \text{corrisponde a } Dx(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} x$$

Nella forma $\begin{cases} Dx = f(x,u,t) \\ y = h(x,u,t) \end{cases}$ si individuano alcuni degli elementi fondamentali dei sistemi dinamici:

**STATO** → il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è detto vettore di stato del sistema
↳ lo stato del sistema è un insieme di variabili, la cui conoscenza ad un generico $t_0$ e insieme alla conoscenza degli $u(t)$ è sufficiente a determinare i valori di $x(t)$ e $y(t)$

**INGRESSI** → Termini forzanti raccolti nel vettore $u(t)$
↳ un ingresso $u_i(t)$ rappresenta l'azione che un agente esterno al sistema può esercitare su di esso, forzandone la sua evoluzione [↳ può anche controllare]
↳ si distinguono in:
- **INGRESSI MANIPOLABILI** → scelti in modo da influenzare il comp. del sistema
- **INGRESSI INCONTROLLABILI** o **DISTURBI** → possono alterare i comportamenti del sistema in senso negativo

↑ grandezza che appare con l'ordine di derivazione più alto ‖ ←

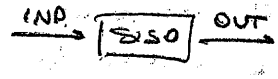
**USCITE** → i termini $y(t)$ sono detti uscite del sistema
↳ rappresenta una grandezza variabile nei termini della quale si riassume il comportamento del sistema ‖ ←

si possono classificare in:
- **USCITE CONTROLLATE** → indicano il comportamento del sistema su cui può voler agire a progettare e controllare
  ↳ il cui andamento nel tempo è soggetto a specifiche di progetto.
- **USCITE DI MISURA** → grandezze disponibili alla misurazione la cui conoscenza può essere utilizzata per alcune maggiori informazioni sul sistema

**VARIABILI DI STATO** → permettono di conoscere lo "stato" del sistema
↳ la loro scelta deve essere mirata ad andare a cogliere la descrizione del sistema
↳ valori della grandezza di ordine più alto all'ordine $n-1$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

I sistemi si possono classificare in:

- SISO → single input, single output → 
- MISO → Multiple input, " "
- MIMO → " " , Multiple "
- SIMO → single " , " "

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

## PROPRIETÀ DEI SISTEMI DINAMICI

- **CAUSALITÀ** → un sistema si dice causale se per ogni $t$ il valore dell'uscita $y(t)$ dipende solo dai valori di $u(\tau)$ per $\tau \le t$ (solo dai valori di ingresso passati).

Se vale per $\hat{\tau} < t$ → sistema **STRETTAMENTE CAUSALE** ‖

In un sistema causale la $y(t)$ dipende solo dall'andamento nel passato dello stesso ingresso.

Ave importo il precedente: $n \ge p$ → sistema è causale (o se vale $n > p$ → strett. causale o proprio) ‖

Se un sistema NON è causale → NON è fisicamente realizzabile ‖

La forma di stato di un sistema strettamente causale evidenzia la presenza di una dipendenza algebrica fra uscita e ingresso

$$\Sigma_D \begin{cases} \mathbb{D}x = f(x,u,t) \\ y = h(x,t) \end{cases}$$

un sistema con eq. in forma normale non causale non può avere questa forma di stato

- **STAZIONARIETÀ** → un sistema nelle cui equazioni non appare esplicitamente il tempo si dice **STAZIONARIO** o **TEMPO-INVARIANTE**

Un sistema in forma normale è stazionario se $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$

$$\Sigma_D \begin{cases} \mathbb{D}x = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases}$$

Le soluzioni di un sistema Tempo-invariante NON dipendono dall'istante iniziale. ‖

- **LINEARITÀ** → un sistema in forma normale nel quale $f$ è lineare rispetto alle $\mathbb{D}^i y$, $i = 0, \dots, n-1$ e alle $\mathbb{D}^j u$, $j = 1, \dots, p$ cioè un sistema nella forma:

$$\mathbb{D}^n y = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i(t)\, \mathbb{D}^i y + \sum_{j=0}^{p} b_j(t)\, \mathbb{D}^j u$$

(si dice **SISTEMA LINEARE**)

I coefficienti $a_i, b_j$ sono in generale funzioni del Tempo. Se il sistema è lineare stazionario → coeff. sono costanti

Da notare:

- Ogni soluzione del sist. lineare → somma integrale omogenea + particolare (→ si studierà dopo)
- Se $y_1, \dots y_n$ sono $n$ soluzioni omogenee indip ⇒ ogni loro combinazione lineare delle $y_i(t)$ è comb. lineare
- Le costanti sono univocamente determinate date le $n$ condizioni iniziali del sistema.

Se $y_a$ è sol della condizione $y(t_0) = y_a^0$ e $y_b$ è sol di $y(t_0) = y_b^0$ ⇒ la soluzione è data da $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$

**SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI CONDIZIONI INIZIALI**

DELLE

- La sovrapp. degli effetti vale anche per la funzione di ingresso
  Se $y_{p_1}$ è l'integrale particolare per $u(t) = u_1(t)$ ⇒ la sol corrispondente:

  $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \dots \Rightarrow \alpha_1 y_{p_1}(t) + \alpha_2 y_{p_2}(t) \dots$

- Se $y_p(t)$ è un integrale particolare per $u(t)$ ⇒ $\mathbb{D} y_p(t)$ è un integrale di $Du(t)$

Un sistema in FORMA DI STATO nel quale $f(x,u,t)$ e $h(x,u,t)$ sono lineari rispetto ad $x$ e $u$ ⇒ è un sistema lineare. Si ha:

$$\dot{x} = f(x,u,t) = Ax + Bu$$
$$u(x,u,t) = Cx + Du$$

$\left( x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^l \right)$

$A \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$ ⇒ matrice quadrata

Dove $A, B, C, D$ sono matrici di dimensioni $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$, $l \times m$

(MATRICE DELLA DINAMICA ‖ ✱ ) ↳ con elementi in funzione del Tempo [e equazioni con in termini forzanti]

Un sistema lineare e stazionario in forma di stato è scritto:

$$\begin{cases} \mathbb{D}x = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

→ matrici a elementi costanti in cui è spento il Tempo $D(t)u(t)$.

Lo nei sist. strettamente causali non c'è $D(t)u(t)$

**SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DINAMICHE**

Per un sistema ingresso – stato nella forma:

$$\mathbb{D}x = f(x,u,t) \qquad x(0) = x_0$$

L'insieme di soluzioni, cioè di funzioni $\hat{x}$ tali per cui si abbia:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(x_0, u, t) : \quad \mathbb{D}\hat{x} = f(\hat{x}, u, t) \quad \hat{x}(0) = x_0$$

non è in generale garantita, ne tantomeno l'esistenza è unica.

Quello che ci interessa è una caratterizzazione qualitativa delle soluzioni in termini ad esempio di stabilità e instabilità.

Consideriamo un sistema TC non lineare stazionario autonomo $\dot{x} = f(x)$

Uno STATO $\bar{x}$ si dice STATO DI EQUILIBRIO se il sistema, trovandosi in $\bar{x}$ in un qualsiasi $\bar{t}$ vi rimane $\forall t \geq \bar{t}$. ↑ $Dx = 0$

Condizione necessaria e suff. affinché $\bar{x}$ sia di eq ⇒ $f(\bar{x}) = 0$

Più in generale per un sistema:

$\dot{x} = f(x,u,t)$ ⇒ la COPPIA $(\bar{x}, \bar{u})$ con $\bar{u}$ che è una COPPIA DI STATI E INGRESSI DI EQUILIBRIO se $f(\bar{x}, \bar{u}, t) = 0 \ \forall t$

MASTER COPY
Tel. 050 3312126
Cell. 333 9937745

## EQUILIBRI DI SISTEMI LINEARI TC

Per un sistema LTITC (Lineare Tempo Invariante Tempo Continuo) soggetto ad un ingresso costante $\bar{u}$ gli equilibri sono caratterizzati dall'equazione: $\longrightarrow$ $\boxed{A\bar{x} = -B\bar{u}}$

Quindi: $\uparrow \det(A) \neq 0$

- se la matrice dinamica **A è INVERTIBILE** (non ho autovalori nell'origine)
  - $\forall$ ingresso $\bar{u}$ $\exists$ un solo stato di equilibrio $\rightarrow \bar{x} = A^{-1}B\bar{u}$

  Se $\bar{u} = 0 \Rightarrow$ l'unica soluzione possibile $\bar{x} = 0 \Rightarrow$ l'origine è l'unico possibile equilibrio quindi è un **EQUILIBRIO ISOLATO**

- se **A NON è INVERTIBILE** (uno o più autovalori nell'origine, $\det(A) = 0$)
  - non è scontato che $\exists$ $\forall \bar{u}$ un $\bar{x}$. No se $\exists$ un $\bar{x} \Rightarrow$ ogni punto $x^1 = \bar{x} + x_N$ ($x_N \in \ker A$) è pto di equilibrio corrispondente a $\bar{u}$.
    - nullo $\Rightarrow \ker A = \{v \in K^n : Av = 0\}$

  Per $\bar{u} = 0 \Rightarrow$ l'origine è un equilibrio non isolato, in quanto tutto lo spazio nullo di A è di equilibrio
  - Tutto $\ker(A)$ più generale di dove altri equilibri oltre all'origine.

## LINEARIZZAZIONE APPROSSIMATA

L'importanza dei sistemi lineari $\rightarrow$ **approssimazione locale** di sistemi più in generale non lineari, in prossimità di **condizioni di funz. normale**.

Molto spesso queste condizioni coincidono con un equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$
$\Rightarrow$ è metodo con cui un sistema non lineare può venire approssimato linearmente.

1) consideriamo sistemi Tempo invarianti $\rightarrow$ $\mathbb{D}x = f(x,u)$

Se sviluppo in serie di Taylor no:

$$f(x,u) \approx f(\bar{x},\bar{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} (x-\bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} (u-\bar{u})$$

$f$ calcolato all'equilibrio

Definendo: ($A$ in generale è una matrice quadrata)

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \quad \text{e} \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}$$

$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ $x_1$ $x_n$

$B$ $\frac{\partial f}{\partial u}$ $\frac{\partial f}{\partial u}$

↳ n° colonne pari al n° degli ingressi

↳ vanno calcolate nelle soluzioni di equilibrio.

Se introduco nuove variabili di stato: $\hat{x} = x - \bar{x}$ e

nuovi ingressi: $\hat{u} = u - \bar{u}$ ottengo che:

$$\mathbb{D}\hat{x} = \mathbb{D}x - \mathbb{D}\bar{x} \approx f(\bar{x},\bar{u}) + A\hat{x} + B\hat{u} - \mathbb{D}\bar{x}$$

Però dalle condizioni di equilibrio, $\mathbb{D}\bar{x} = \dot{\bar{x}} = f(\bar{x},\bar{u}) = 0$

↳ $\boxed{\mathbb{D}\hat{x} = A\hat{x} + B\hat{u}}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745