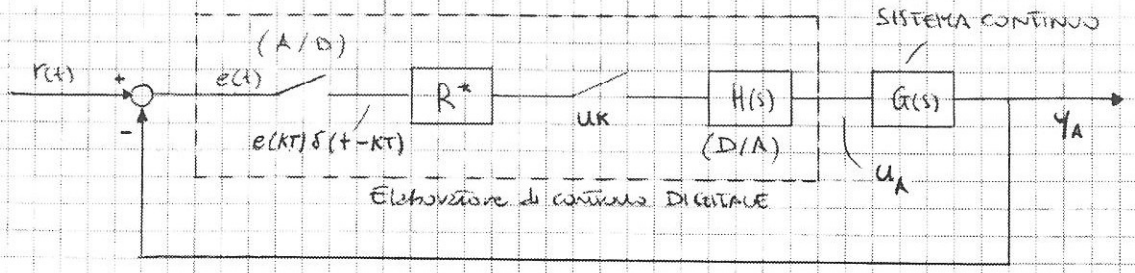
Appunti delle lezioni di Controllo Digitale (M. Bianchi & A. Caiti)

Filippo F.

=> STRUMENTI MATEMATICI per l'ANALISI DEI SISTEMI DISCRETI





- **OBIETTIVO** → R^* deve avere prestazioni più simile possibile a $R(s)$ [Regolatore in tempo continuo]
  $u_A \cong u_B$ il più possibile

$e_K = e(KT)$ con $K = 0, 1, 2, 3 \dots$

$\Rightarrow u_K = f(u_1, u_2 \dots u_{K-1}; e_1, e_2 \dots e_K)$

↳ Funzione LINEARE dipendente da un numero finito di parametri

$$u_K = -a_1 u_{K-1} - a_2 u_{K-2} \dots - a_K u_{K-u} + b_0 e_K + b_1 e_{K-1} + \dots + b_m e_{K-m}$$

EQUAZIONE LINEARE ALLE DIFFERENZE DI ORDINE n

- $\nabla u_K = u_K - u_{K-1}$ DIFFERENZA di ordine 1

  $\nabla^2 u_K = \nabla u_K - \nabla u_{K-1}$ DIFFERENZA di ordine 2

  $\vdots$

  $\nabla^n u_K = \nabla^{n-1} u_K - \nabla^{n-1} u_{K-1}$ DIFFERENZA di ordine n

Es. $u_K = -a_1 u_{K-1} - a_2 u_{K-2} + b_0 e_K$ [Forma RICORSIVA → Più conveniente per una realizz. computazionale]

$$\begin{cases} \nabla u_K = u_K - u_{K-1} \Rightarrow u_K = \nabla u_K - u_{K-1} \Rightarrow \left[u_{K-1} = u_K - \nabla u_K\right] \\ \nabla^2 u_K = \nabla u_K - \nabla u_{K-1} \end{cases}$$

↳ $\nabla u_{K-1} = u_{K-1} - u_{K-2}$

$\nabla^2 u_K = \nabla u_K - u_K + \nabla u_K + u_{K-2} = -u_K + 2\nabla u_K + u_{K-2}$

$\Rightarrow \left[u_{K-2} = u_K - 2\nabla u_K + \nabla^2 u_K\right]$

$\Rightarrow u_K = -a_1 (u_K - \nabla u_K) - a_2 (u_K + 2\nabla u_K + \nabla^2 u_K) + b_0 e_K$

$b_0 e_K = u_K (1 + a_1 + a_2) + \nabla u_K (-a_1 - 2a_2) + a_2 \nabla^2 u_K$ [Forma di EQ. alle DIFFERENZE]

(NB - Se a_i e b_i $\forall i$ sono costanti $\Rightarrow$ EQ. alle DIFF con coefficienti costanti)

=> Per calcolare i coeff. è necessario conoscere le CONDIZIONI INIZIALI.

Es.

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$$

Istante iniziale => $k = 2$

Calcolare la soluzione per $k \geq 2$ => conoscere le condizioni iniziali u_0, u_1

$u_2 = u_1 + u_0$

Se $u_0 = u_1 = 1$ ⟶ Per $k \geq 0$ corrisponde alla SEQUENZA di FIBONACCI

I valori u_k crescono nel tempo

~ La risposta di un SISTEMA DINAMICO DIVERGE per condizioni iniziali FINITE e INGRESSO NULLO

↳ SISTEMA INSTABILE

=> Sono $u_k = c z^k$ => dove z è una variabile complessa che è l'analogo di s nel T.D.

$$c z^k = c z^{k-1} + c z^{k-2} \longleftarrow u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$$

↓ divido per $c z^k$

$$1 = z^{-1} + z^{-2} \Rightarrow \underline{z^{-2} + z^{-1} - 1 = 0}$$ POLINOMIO CARATTERISTICO

$u_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$ => Somma di due soluzioni è ancora soluzione

Impongo che $u_0 = u_1 = 1$ => $\underline{k=0}$ => $u_0 = c_1 + c_2 = 1$

$\underline{k=1}$ => $u_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 = 1$

Quindi z_1 e z_2 sono POSITIVI necessariamente

$u_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$ => $z_1 > 0$ => z_1^k CRESCE ILLIMITATAMENTE all'aumentare di k

(INSTABILITÀ del SISTEMA)

- Se una radice z_1 ha modulo >1 ($|z_1| > 1$) => Fuori dal cerchio di raggio unitario centrato nell'ORIGINE del piano complesso $\mathbb{C}$

↓

Corrisponde a un EQ. DIFFERENZIALE ISTABILE (nel tempo continuo)

↳ Divergerà per qualsiasi condizione iniziale finita

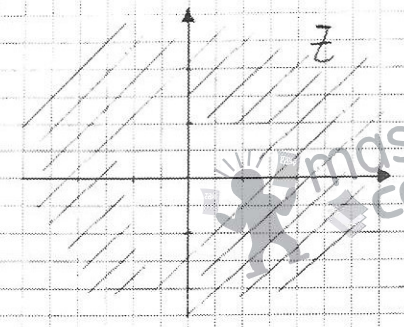
- Se $|z_1| < 1$ => EQ. DIFFERENZIALE STABILE (nel tempo continuo) ⟶ Soluzione convergerà a 0 per ogni condizione iniziale finita.

TRASFORMATA $\mathcal{Z}$:

Metodo OPERAZIONALE utilizzato per studiare i SISTEMI DINAMICA nel TD.

⇒ Condizione della TRASFORMATA UNILATERA ⇒ $x_k = 0$ per $\forall\, k<0$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x_k] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$



La $\mathcal{Z}$-TRASFORMATA è definita in una regione del piano complesso $\mathcal{Z}$ detta "DOMINIO DI CONVERGENZA" che corrisponde all'insieme dei punti in cui la serie converge. Il $D_c = \{ z \in \mathcal{Z} : |z| > R \}$ cioè la zona di $\mathcal{Z}$ che non appartiene a cerchio di raggio R centrato nell'origine.

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x_k] \qquad x_{(t)} \longrightarrow x_k \longleftrightarrow X_{(z)}$$

Un segnale continuo $x(t)$ se campionato uniformemente con periodo $T = t/k$ ottengo una sequenza di valori discreti x_k che posso portarli nel dominio $\mathcal{Z}$

NB ⇒ Se cambio T cambio i valori di x_k e di conseguenza delle $X(z)$

↳ TEMPO di CAMPIONAMENTO

⇒ Relazione con il dominio di Laplace ⇒ $x_k = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]_{t=kT}$ e $X(z) = \mathcal{Z}[x_k]$

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 (z-z_1)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)} \qquad m \le n \text{ Sistemi CAUSALI}$$

↓

Zeri e Poli le cui posizione nel piano complesso $\mathcal{Z}$ determina l'andamento di $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

~ Trasformate di FUNZIONI ELEMENTARI:

- Impulso discreto unitario (DELTA di KRONECKER)

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t=0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) z^{-k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_0(kT) z^{-k} = 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} \dots = 1$$

- Gradino unitario

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{con } |z| > 1$$

SERIE geometrica $q = z^{-1} \Rightarrow \frac{1}{1-q}$

- **Rampa Unitaria**

$$x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) z^{-k} = T \sum_{k=0}^{+\infty} k z^{-k} = T\left(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} \dots k z^{-k}\right)$$

$$= T z^{-1}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots\right) = T \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = T \frac{z}{(z-1)^2} \quad |z| > 1$$

$$1 + 2q + 3q^2 \dots$$

$$\text{L.} \quad \frac{1}{(1-q)^2}$$

- **Potenza**:

$$x(t) = \begin{cases} a^t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{kT} z^{-k} = 1 + a^T z^{-1} + a^{2T} z^{-2} + \dots + a^{kT} z^{-k}$$

$$= \left[q = a^T z^{-1}\right] \Rightarrow 1 + q + q^2 + q^3 + \dots q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - a^T z^{-1}}$$

$$\text{Se } T = 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

Punti $\notin$ alla circonferenza di raggio a centrata in 0.

(In generale $|z| > |a|$)

- **Esponenziale**:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-akT} z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots e^{-kaT} z^{-k}$$

$$= \left[q = e^{-aT} z^{-1}\right] = 1 + q + q^2 + \dots q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$|z| > e^{-\mathrm{Re}(a)T}$$

- **Sinusoide**:

F. d. Eulero $\Rightarrow e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \Rightarrow \sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(\omega kT) z^{-k}$$

Sfruttando il risultato precedente $\Rightarrow X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right)$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right) \quad |z| > 1$$