



Appunti delle lezioni di Controllo dei Robot (A. Bicchi)





Filippo F.

Lezione 1:

Tipicamente nella teoria dei sistemi prendiamo un sistema non lineare e ne calcoliamo il LINEARIZZATO attorno ad un particolare moto di riferimento. ⇒ Sviluppo di Taylor della funzione della dinamica degli stati e prendere solo il 1° termine.

Ovviamente ci sono anche gli altri termini (infiniti di ordine superiore) che dovrò essere trascurati sviluppando un controllo del sistema linearizzato sufficientemente robusto. Quando siamo nelle condizioni di regime, nelle quali è avvenuta la linearizzazione, i termini relativi agli infinitesimi di ordine superiore sono sufficientemente piccoli e il controllore costruito sul sistema linearizzato funziona abbastanza bene

→ Nel controllo dei Robot nasce l'esigenza di introdurre il CONTROLLO NON LINEARE a causa di:

- Equazioni della dinamica dei Robot sono fortemente non lineari → $M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$
  ↓
  Non possono essere linearizzate attorno ad un punto di equilibrio ⇒ Robot non fanno mai la stessa operazione dato che sono riprogrammabili
  ↳ Robot sono costruiti per muoversi → Difficile trovare un regime in cui è possibile linearizzare significativamente le equazioni dinamiche.

Nel corso tratteremo di SISTEMI VINCOLATI e NON VINCOLATI

$\#gdl < \#configurazioni\ (q)$ { - Olonomo → Coordinate Lagrangiane q possono assumere qualsiasi valore
- Anolonomo → limito le velocità ma non le configurazioni

Sistemi COMPLETAMENTE ATTUATI se hanno $\#attuatori \geq \#gdl$ e in cui ad ogni gdl è associato almeno un attuatore.
↳ Se fermo gli attuatori se il sistema è fermo allora è completamente attuato
↳ Una generica configurazione può essere una CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO

Altrimenti sistemi SOTTOATTUATI → Non tutte le configurazioni sono di equilibrio
↳ $\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = k(\theta - q) \rightarrow \text{Eq. dei gdl del sistema} \\ I_m\ddot{\theta} + h(\theta,\dot{\theta}) + k(\theta - q) = \tau \rightarrow \text{Eq. delle variabili attuate} \end{cases}$

→ Nel corso studieremo 3 PROBLEMI:

1) Problema di POSTURA: Vogliamo portare il robot ad una certa posizione e orientazione di tutte le sue componenti ⇒ $q(t) \rightarrow q_d$ costante (Es. Voglio parcheggiare un veicolo.)
↳ Nei robot articolati è noto come PICK-AND-PLACE

2) Problema di MOVIMENTO: (Trajectory control) Portare $q(t) \rightarrow q_d(t)$ dove $q_d(t)$ andamento desiderato nel tempo (andamento a regime, per t elevati)

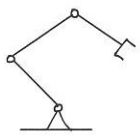
3) Problema di TRACCIA o PERCORSO: (Path control) Portare $q(t) \rightarrow \Gamma = \{q \mid C(q) = 0\}$ Vado su una configurazione che soddisfa l'eq. $C(q) = 0$

(Tavola base → braccio a 3-4 GDL con controllo di postura e movimento.)

→ SISTEMI AD ATTUAZIONE COMPLETA NON VINCOLATI:

Per i sistemi completamente attuati è abbastanza semplice applicare il problema di DIVISIONE del CONTROLLO in una parte CINEMATICA e una parte DINAMICA.

1) Problema di POSTURA:



Definiamo una ξ_d costante $\dot{\xi}_d = 0$ dove ξ_d vettore degli angoli del manipolatore
Prendiamo in ingresso al sistema le quasi velocità del manipolatore ⇒ $u = \dot{q}$
Definiamo l'errore $e(t) = \xi_d - \xi(t)$ dove $\xi(t) = Q(q(t))$ ↳ Cinematica DIRETTA
$q(t) \in \mathbb{R}^n$ spazio dei giunti
$\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ spazio di task

Per ora conosciamo solo LYAPUNOV:

→ Candidato di Lyapunov: $V = \frac{1}{2}e^Te$ funzione definita positiva

→ Deriviamo la candidata di Lyapunov → $\dot{V} = e^T\dot{e} = -e^TJu$ → Dobbiamo scegliere u t.c. $\dot{V} < 0$

$\dot{\xi} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} = J\dot{q} = Ju \rightarrow \dot{e} = -Ju$
↑ Jacobiano analitico

Se $n = m$ → Possiamo scrivere $u = J^{-1}e$ → Se $J(q)$ è invertibile
In questo modo $\dot{V} = -e^Te$ Negativa definita

(Newton-Raphson applicato alla robotica.)
↑
Algoritmo Close-loop-Inverse-Kinematics (CLIK)

Se $J(q)$ attraversa una singolarità l'algoritmo non funziona perché J non è invertibile.

Si nota che $\dot{V} = -2V \Rightarrow V(t) = e^{-2t}$ per $t \rightarrow \infty$ $V(t) \rightarrow 0$ convergenza esponenziale

CLIK → Algoritmo che funziona bene se il sistema è lontano dalle singolarità e se $n \neq m$

Se siamo in presenza di singolarità ⇒ $u = J^T(q)e$ → $\dot{V} = -e^TJ(q)J^T(q)e$ semidefinita negativa ⇒ se $e \in \ker(J^T)$, $\dot{V} = 0$ anche se $e \neq 0$
↳ Metodo del Gradiente ↳ Lemma di Lasalle-Krasovskij

Metodo che presenta una velocità di convergenza minore rispetto al CLIK

- Se siamo nelle condizioni di $n \neq m$ → Se $n<m$ dobbiamo prendere un task che il manipolatore sia in grado di effettuare
  - Se $n>m$ caso di RIDONDANZA delle SOLUZIONI → Più configurazioni per eseguire lo stesso task

$J = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ (m righe, n colonne)

Se $rg(J) < m$ singolarità ⇒ Non possiamo ottenere velocità arbitraria dell'E-E a partire dalle velocità dei giunti.

Presenta sicuramente uno spazio nullo $N_J \in \mathbb{R}^{n-r}$

se $rg(J) = m$ ⇒ Possiamo usare l'algoritmo di NEWTON-RAPSON utilizzando una matrice inversa DESTRA → J^R ⇒ $u = J^R \dot{e}$

↳ Se prendiamo un ingresso $u = J^R \dot{e} + N_J \lambda$ ⇒ $\dot{V} = -e^T J J^R e - e^T J N_J \lambda = -e^T J J^R e$ ($N_J\lambda$: c.l. delle basi del nullo; $J N_J \lambda = 0$)

↳ Velocità dei giunti che non causano un movimento dell'E-E.

↳ $JJ^R = I$ (per matrici quadrate $J^R = J^{-1}$)

Se $rg(J) = m$ ⇒ J_R ESISTE SEMPRE e sono infinite

→ $J_R = J^T (JJ^T)^{-1}$ (un esempio di inversa dx)

↳ matrice quadrata $m \times m$ è invertibile se $rg(J) = m$

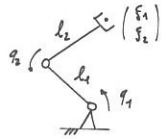
(Si trova anche come PSEUDO-INVERSA DX)

→ Un'altra possibile inversa destra: $J^R = W J^T (J W J^T)^{-1}$ → Minimizza la norma 2 pesata in W.

Caso particolare della PSEUDO-INVERSA: $J^+ = V \Sigma^+ U^T$

Lezione 2:

2) Problema di MOVIMENTO → Trajectory Control



Scriviamoci il Jacobiano di un RR - Planare:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 s(q_1) - l_2 s(q_1+q_2) & -l_2 s(q_1+q_2) \\ l_1 c(q_1) + l_2 c(q_1+q_2) & l_2 c(q_1+q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = J(q_1, q_2, l_1, l_2) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$\| \quad J(\underline{q}, p_k)$

Se non conosciamo con esattezza i parametri p_k, ma conosciamo solamente una stima $\hat{p}_k$

⇒ La cinematica diretta $Q(\underline{q}, \hat{p}_k) \neq \underline{\xi}$ → Necessaria fonte esterna di informazioni.

Vogliamo minimizzare l'errore ⇒ $e(t) = \xi_d(t) - \xi(t)$ dove $\xi(t) = Q(q)$

- Definiamo $\dot{\xi} = J(q)\dot{q}$ dove $u = \dot{q}$ (ingresso velocità dei giunti) ⇒ Prendiamo $u = \dot{q} = J^R(\dot{\xi}_d + Ke)$
- In questo modo $\dot{e} = \dot{\xi}_d - J\dot{q} = \dot{\xi}_d - \dot{\xi}_d - Ke = -Ke$ ⇒ Errore converge a 0 esponenzialmente ⇒ $e(t) = e^{-Kt} e(0)$

} Caso in cui si conoscono i parametri p_k

Se siamo nelle condizioni in cui non si conosce esattamente i parametri $\hat{p}_k$ ⇒ $\hat{J}(q, \hat{p}_k)$ ⇒ $u = \hat{J}^R(\dot{\xi}_d + Ke)$ ⇒ $\dot{e} = \dot{\xi}_d - J\hat{J}^R(\dot{\xi}_d + Ke)$

Calcolare $\hat{J}J^R$ può essere difficoltoso ⇒ Si effettuano delle manipolazioni sulla $\dot{e}$ ⇒ $\boxed{\dot{e} = \dot{\xi}_d - J\dot{q} + \hat{J}\dot{q} - \hat{J}\dot{q}}$ Questa scelta non si usa

→ $\dot{e} = \dot{\xi}_d - \hat{J}\dot{q} - (J\dot{q} - \hat{J}\dot{q}) = -Ke - (J\dot{q} - \hat{J}\dot{q})$

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 s(q_1) - l_2 s(q_1+q_2) & -l_2 s(q_1+q_2) \\ l_1 c(q_1) + l_2 c(q_1+q_2) & l_2 c(q_1+q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \dot{q}_1 s(q_1) - l_2 \dot{q}_1 s(q_1+q_2) - l_2 \dot{q}_2 s(q_1+q_2) \\ l_1 \dot{q}_1 c(q_1) + l_2 \dot{q}_1 c(q_1+q_2) + l_2 \dot{q}_2 c(q_1+q_2) \end{pmatrix}$$

Possiamo estrarre i termini incogniti $p_k = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \dot{q}_1 s(q_1) - l_2 \dot{q}_1 s(q_1+q_2) - l_2 \dot{q}_2 s(q_1+q_2) \\ l_1 \dot{q}_1 c(q_1) + l_2 \dot{q}_1 c(q_1+q_2) + l_2 \dot{q}_2 c(q_1+q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s(q_1)\dot{q}_1 & -\dot{q}_1 s(q_1+q_2) - \dot{q}_2 s(q_1+q_2) \\ c(q_1)\dot{q}_1 & \dot{q}_1 c(q_1+q_2) + \dot{q}_2 c(q_1+q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = Y(q, \dot{q})\, p_k$$

Regressore cinematico

$\Rightarrow W_k(p_k)$

Volendo avremmo potuto estrarre non solo il vettore dei link $p_k \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ ma anche combinazioni di essi come $\begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ l_1 - l_2 \end{pmatrix}$ oppure aggiungendo un parametro l_3 (aumentando la dimensione della matrice $Y(q, \dot{q})$). ⇒ La scelta dei parametri che rendono la scrittura della cinematica differenziale lineare non è unica ⇒ Ce ne sono molte possibili.

⇒ Definiamo anche la funzione non lineare $\pi_k = W_k(p_k)$ dei parametri p_k ⇒ La relazione con dei Jacobiani più complessi è possibile che non possa essere scritta linearmente con dei parametri elementari, ma è possibile che venga scritta linearmente rispetto a relazioni non lineari dei parametri elementari

$\xi = J(q, p_k)\dot{q} = Y(q, \dot{q})\, \pi_k$ con $\pi_k = \pi(p_k)$

↳ N.B. Funzione che può anche non essere lineare nei parametri.

N.B. Obiettivo da raggiungere ⇒ Nella $Y(q, \dot{q})$ devono essere presenti solamente parametri noti.

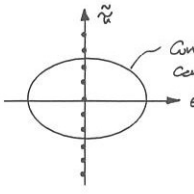
Applicando questa manipolazione ⇒ $(J\dot{q} - \hat{J}\dot{q}) = Y(q, \dot{q})\pi - Y(q, \dot{q})\hat{\pi} = Y(q, \dot{q})(\pi - \hat{\pi}) = Y(q, \dot{q})\tilde{\pi}$

→ $\dot{e} = -Ke - Y(q, \dot{q})\tilde{\pi}$

Definiamo un ingresso che modifica l'andamento della stima dei parametri → $\dot{\hat{\pi}} = u_\pi$ ⇒

$$\begin{cases} \dot{e} = -Ke - Y(q, \dot{q})\tilde{\pi} \\ \dot{\tilde{\pi}} = u_\pi \end{cases}$$

Vogliamo convergere a 0 questo sistema in uno spazio di stato $x = \begin{pmatrix} e \\ \tilde{\pi} \end{pmatrix}$



A noi interessa trovare dei punti $\in$ asse delle y, in cui $e(t) = 0$

Tuttavia ci interessa l'origine del piano $(e, \tilde{\pi})$ ⇒ Si sceglie una candidata di Lyapunov

$V = \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^T \tilde{\pi}$

Perché se vogliamo usare Lyapunov è necessario avere delle curve di livello chiuse. Inoltre in questo modo portando a 0 $\tilde{\pi}$ possiamo capire meglio a proposito della convergenza dei parametri stimati.

$V = \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2} \tilde{\pi}^T \tilde{\pi} \Rightarrow \dot{V} = e^T \dot{e} + \tilde{\pi}^T (\dot{\pi} - \dot{\hat{\pi}}) = e^T \dot{e} + \tilde{\pi}^T \dot{\hat{\pi}}$

$\dot{\pi} \cong 0$ dato che i link hanno una dinamica molto lenta (deformazioni nel tempo trascurabili es. dilatazioni termiche)

$\Rightarrow \dot{V} = -e^T K e - e^T Y \tilde{\pi} - \tilde{\pi}^T u_T$, $u_T = \dot{\hat{\pi}}$ scelta da noi

Se si sceglie $u_T = -Y^T e \Rightarrow \dot{V} = -e^T K e - e^T Y \tilde{\pi} + \tilde{\pi}^T Y^T e = -e^T K e$ (scalari)

NEGATIVA SEMIDEFINITA perché si attende in punti diversi dall'origine ($e = 0$ $\tilde{\pi} = 0$) $\Rightarrow$ NULLA per $e = 0$ e $\tilde{\pi} \neq 0$

Essendo SEMIDEFINITA NEGATIVA il metodo di Lyapunov non conclude $\Rightarrow$ Dobbiamo andare oltre.

Se voglio vedere la matrice $Y(q, \dot{q})$ nello spazio di stato $x = \begin{pmatrix} e \\ \tilde{\pi} \end{pmatrix} \Rightarrow q = q_d - e_q = Q^{-1}(\xi_d) - e_q$

→ Se $\xi_d(t) \Rightarrow$ Sistema TEMPO VARIANTE → Laselle - Yoshizawa o Barbalat (↳ Se si insegue una traiettoria $\xi_d(t)$ (tempo variante))

Essendo la $\dot{V}$ semidefinita negativa non può che diminuire fino a che non arriva ad un punto in cui $\dot{V} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \dot{V} = 0$ (altra def. dell'insieme invariante massimo)

L'insieme dei punti in cui $\dot{V} = 0$ è quando $e = 0 \Rightarrow$ Tutti sulle ordinate del piano $(e, \tilde{\pi})$

Si sostituisce nella dinamica:

$$\begin{cases} 0 = 0 - Y \tilde{\pi} \\ \dot{\hat{\pi}} = u_T = -Y^T e = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Il sistema convergerà a valori di $e = 0$ e a valori di π t.c. $Y \tilde{\pi} = 0$ e costanti $\tilde{\pi} = \dot{\pi} - \dot{\hat{\pi}} = -\dot{\hat{\pi}} = 0$

→ Quindi tramite questo algoritmo non si converge all'origine del piano $(e, \tilde{\pi})$

ORIGINE non ASINTOTICAMENTE STABILE

Tuttavia $Y(q, \dot{q})$ può avere uno SPAZIO NULLO:

- Se $\dim\left[\ker(Y(q,\dot{q}))\right] = 0 \Rightarrow Y \tilde{\pi} = 0$ solo se $\tilde{\pi} = 0 \Rightarrow$ Origine ASINTOTICAMENTE STABILE
- Se $\dim\left[\ker(Y(q,\dot{q}))\right] > 0 \Rightarrow Y \tilde{\pi} = 0$ anche per $\tilde{\pi} \neq 0$ e $\in \ker(Y(q,\dot{q})) \Rightarrow$ Converge $(0, \tilde{\pi}^*)$ con $\tilde{\pi}^* \in \ker\left(Y(q,\dot{q})\right)$ (dipendente dal tempo esplicitamente $q(t)$ e $\dot{q}(t)$)

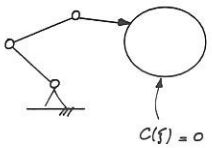
→ In ogni caso l'ERRORE di INSEGUIMENTO della TRAIETTORIA DESIDERATA $e(t) \to 0$.

Per avere "particolari" traiettorie desiderate a regime il sistema converge nell'ORIGINE del piano $(e, \tilde{\pi}) \Rightarrow q_d(t), \dot{q}_d(t)$ tali che $\tilde{\pi} \in \ker\left[Y(q_d(t), \dot{q}_d(t))\right]$

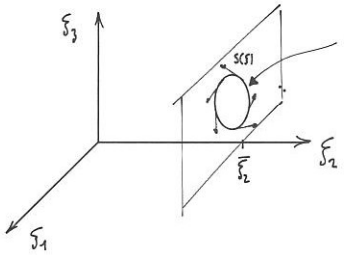
↳ traiettorie PERSISTENTEMENTE ECCITANTI → Ci sono traiettorie che fanno fluire (identificano) meglio dei parametri. Non ci sono traiettorie che identificano tutti i parametri: o niente (problemi + complessi)

↳ $\tilde{\pi} \to 0$ significa IDENTIFICARE il parametro π di cui conosciamo solamente una sua stima $\hat{\pi}$.

3) Problema di TRACCIA o PERCORSO:



$\xi = Q(q)$ $\xi \in \mathbb{R}^n$ Traccia $\Rightarrow C(\xi) = 0$ con $\dot{\xi} = J \dot{q}$



$C(\xi) = 0 \Rightarrow C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$

↳ Esempio di traccia → circonferenza

$V = \frac{1}{2} C^T(\xi) C(\xi)$ Candidato di Lyapunov

$\dot{V} = C^T(\xi) C_\xi(\xi) J \dot{q}$ → Scegliamo $\dot{q}$ in modo tale da rendere negativa la $\dot{V}$.

Gradiente

→ Prendiamo la matrice S come base dello spazio nullo di $C_\xi(\xi) \Rightarrow Im\left[S(\xi)\right] = \ker\left[C_\xi(\xi)\right]$ $\dot{q} = -J^R C_\xi^T(\xi) C(\xi) \nu$

Possiamo prendere in ingresso $u = \dot{q} = -J^R C_\xi^T C(\xi) \nu + J^R S(\xi) \alpha$ e la $\dot{V}$ rimane invariata dal prendere un ingresso $u = \dot{q}$ come sopra.

$S(\xi)$ vettori tangenti alla traccia di equazione $C(\xi) = 0$ ↳ Componente delle velocità di giunti che lasciano invariato $C_\xi(\xi)$.

$u = \dot{q} = -J^R C_\xi^T C(\xi) \nu + J^R S(\xi) \alpha$ → Controllo CINEMATICO

Parte che garantisce l'avvicinamento alla traccia. ↳ Garantisce la velocità di percorrenza della traccia.

ν e $\alpha \Rightarrow$ Coefficienti che definiscono le velocità di convergenza o di percorrenza della traiettoria.

Con questa azione di controllo si trasforma la traccia $C(q) = 0$ in un CICLO LIMITE ATTRATTIVO.

N.B Nel centro del cerchio $(C(\xi) = 0) \Rightarrow C_\xi(\xi) = 0 \Rightarrow \dim\left[\ker(C_\xi)\right] = 2$ in uno spazio di dimensione 2

Partendo da questo punto (con $u = 0$) $\Rightarrow$ Eq. instabile che con una perturbazione diverge e viene attratto dal ciclo limite.

Se si parte da un punto diverso dall'origine della traiettoria $\Rightarrow$ Non abbiamo questo problema!

Considerazioni sul CONTROLLO ADATTIVO:

- Se siamo nelle condizioni in cui non conosciamo bene i parametri $\tilde{\alpha} = \alpha - \hat{\alpha}$ → Se prendiamo un guadagno alto del controllore otteniamo una convergenza a 0 dell'errore e ma non una convergenza dell'errore $\tilde{\alpha}$.

Questo è dovuto al: $\dot{q} = \hat{J}^{-1}(\dot{s}_d + k_e e)$

$\dot{\hat{\alpha}} = -K Y^T e$ ⇒ Se e è subito piccolo l'aggiornamento della stima è piccolo.

Per Ke bassi ⇒ Convergenza dell'ERRORE di TRAIETTORIA e STIMA lenta ma con successo ⇒ Algoritmo che permette di "imparare" i parametri del robot.

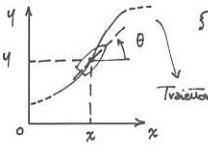
↳ Conta molto anche la TRAIETTORIA DESIDERATA $s_d(t)$ (deve essere eccitante)

↳ È possibile che l'errore $\tilde{\alpha} \to \tilde{\alpha}^*$ dove $e \in \ker[Y(q_d, \dot{q}_d)]$ ⇒ Se scegliamo una traiettoria s_d che non renda singolare $Y(q_d, \dot{q}_d)$ allora è possibile identificare i parametri $\hat{\alpha} \to \alpha$ ⇒ $\dim(\ker(Y)) = 0$.

Lezione 3:

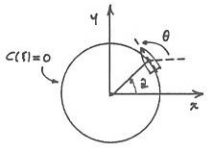
Veicoli: in senso "robotico" ⇒ Basse velocità ⇒ Modelli Cinematici Planari

1) Veicolo nel piano che insegue una traiettoria con eq. $C(s) = 0$



$s = [x, y, \theta]$

Supponiamo che la traiettoria da seguire è una circonferenza $C(s) = 0$



Vincoli geometrici:

$C(s) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - R^2 = 0$ (1)

$\theta - \alpha - \pi/2 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \alpha - \pi/2 = 0$ (2)

→ Si calcola i vincoli cinematici, derivando quelli geometrici:

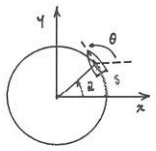
$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \Rightarrow x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ (1)

$\dot{\theta} - \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\dot{x} + \frac{1}{x}\dot{y}\right) = \dot{\theta} - \frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{R^2} = 0 \Rightarrow \theta R^2 + y\dot{x} + x\dot{y} = 0$ (2)

$\Rightarrow A(s)\dot{s} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ y & -x & R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Forma Pfaffiana dei vincoli

→ Si cerca $\dot{s} \in \ker[A(s)] \Rightarrow \dot{s} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \nu \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -y\nu \\ \dot{y} = x\nu \\ \dot{\theta} = \nu \end{cases} \Rightarrow \nu =$ Velocità angolare

Definiamo l'ascissa curvilinea $(S) = R\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = R\alpha \Rightarrow \dot{S} = \frac{R}{R^2}(y^2 + x^2)\nu = R\nu$

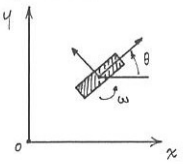


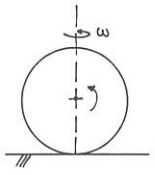
Si definisce una $S_d(t)$ e si definisce l'ingresso $u = \nu = R^{-1}\left(\dot{S}_d(t) + \Lambda(S_d(t) - S(t))\right)$ (Inverso (-1), Termine proporzionale)

Si sostituisce in $\dot{S}(t) = \dot{S}_d(t) + \Lambda(S_d(t) - S(t)) \Rightarrow \begin{cases} e(t) = S_d(t) - S(t) \\ \dot{e}(t) = \dot{S}_d(t) - \dot{S}(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{e} + \Lambda e = 0$

↳ $\dot{e} = -\Lambda e \Rightarrow e(t) = e^{-\Lambda t} e(t_0)$

2) Uniciclo





Ruota può ruotare attorno al proprio asse e a quello perpendicolare al suolo ma non può strisciare perpendicolarmente al proprio asse di rotazione. ⇒ Velocità di avvicinamento della ruota ⊥ asse di rotazione.

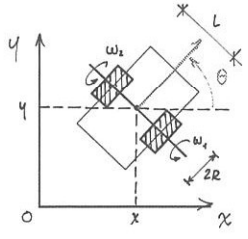


$\dot{y}/\dot{x} = \tan\theta = \frac{s\theta}{c\theta} \Rightarrow \dot{y}c\theta - \dot{x}s\theta = 0$ Vincolo cinematico lineare nelle velocità

→ Scrivibile in forma Pfaffiana ⇒ $A(s)\dot{s} = \begin{pmatrix} -s\theta & c\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = 0$ Vincolo di UNICICLO

→ Si cerca $\dot{s} \in \ker[A(s)] \Rightarrow \dot{s} = \left(\begin{array}{c|c} c\theta & 0 \\ s\theta & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = c\theta\nu_1 & \Rightarrow \nu_1 = v \\ \dot{y} = s\theta\nu_1 & \Rightarrow \nu_2 = \omega \\ \dot{\theta} = \nu_2 \end{cases}$

3) KART



$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 R\frac{L/2}{L}c\theta + \omega_2 R\frac{L/2}{L}c\theta \\ \omega_1 R\frac{L/2}{L}s\theta + \omega_2 R\frac{L/2}{L}s\theta \\ \omega_1 R/L - \omega_2 R/L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta\, R/2\,(\omega_1 + \omega_2) \\ s\theta\, R/2\,(\omega_1 + \omega_2) \\ R/L\,(\omega_1 - \omega_2) \end{pmatrix}$

Se poniamo: $\nu_1 = R/2(\omega_1 + \omega_2) = v$

$\nu_2 = R/L(\omega_1 - \omega_2) = \dot{\theta}$

↓ Cinematica

$\dot{s} = \left(\begin{array}{c|c} c\theta & 0 \\ s\theta & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$