ALGEBRA LINEARE

A.A 2019/2020 PROF: PAOLA BOITO, ALESSANDRA PUJIA, NICOLA VISCIGLIA

INSIEMI E FUNZIONI

$a \in A$ a è un elemento dell'insieme A

Se A e B sono insiemi si può definire:

1. $A \cup B$ = Unione di A e B → insieme degli elementi che appartengono ad A e B
2. $A \cap B$ = intersezione di A e B → " sia ad A che a B
3. $A \setminus B$ = sottrazione → elementi che $\in A$ MA NON A B
4. $A \times B$ = prodotto cartesiano → insieme delle coppie coordinate (a,b) dove $a \in A$, $b \in B$
5. $A \subseteq B$ = sottoinsieme → A è contenuto in B ⇒ gli elementi di A sono anche elementi di B
   $A \supseteq B$ → A contiene B

INSIEMI DI NUMERI:

$\mathbb{N}$ = n. NATURALI $\mathbb{N} = \{0,1,2,3\ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = n. INTERI $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = n. RAZIONALI $\mathbb{Q} = \{p/q : p,q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ = n. REALI

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$
- $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

FUNZIONE

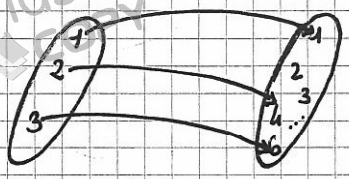
Con A, B insiemi.

Una funzione o applicazione da A a B $f: A \to B$

$\Rightarrow$ È UNA LEGGE CHE ASSOCIA A CIASCUN ELEMENTO DI A UNO E UNO SOLO ELEMENTO DI B.

ES. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(a) = 2a$

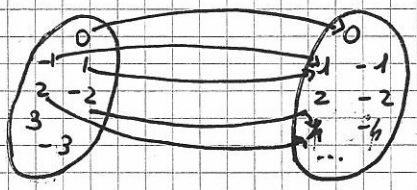


È INIETTIVA

NON È SURIETTIVA

ES. $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(m) = m^2$



NON È INIETTIVA

NON È SURIETTIVA

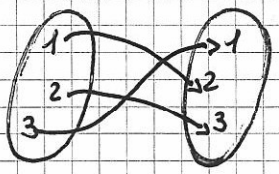
ES. $h: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

$h(1) = 2$

$h(2) = 3$

$h(3) = 1$

INIETTIVA E SURIETTIVA



L'insieme di partenza è detto DOMINIO di f.

L'insieme di arrivo è detto CODOMINIO

- $f: A \to B$ è INIETTIVA se: $f(a_1) = f(a_2)$ per $a_1, a_2 \in A$

  $\Downarrow$

  $a_1 = a_2$

- $f: A \to B$ è SURIETTIVA se: $\forall b \in B \ \exists \ a \in A$ tale che $f(a) = b$
- $f: A \to B$ È BIGETTIVA se è sia iniettiva sia suriettiva
- $f: A \to B$ bigettiva si può definire una funzione $g: B \to A$ tale che

  $g(b) = a \iff f(a) = b$

  g è FUNZIONE INVERSA di f (f^{-1})

ES. 3 $f^{-1}: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

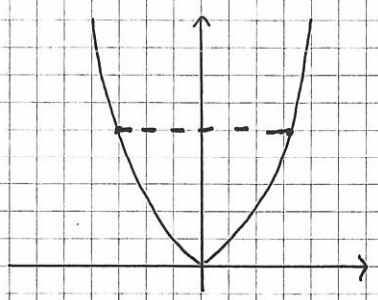
$h^{-1}(1) = 3$

$h^{-1}(2) = 1$

$h^{-1}(3) = 2$

ES $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



NON È INIETTIVA

NON È SURIETTIVA

$\Downarrow$

Si Definisce una funzione modificata

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$

$g(x) = x^2$

ORA È SURIETTIVA ma non iniettiva

Per l'iniettività si attua una RESTRIZIONE DELLA FUNZIONE $g(x)$ per cui

$h: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

$h(x) = x^2$

È SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA $\Rightarrow$ BIGETTIVA E AMMETTE L'INVERSA

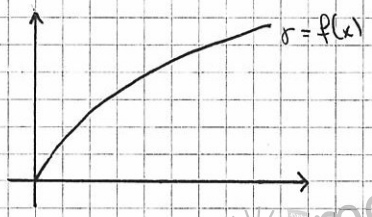
$h^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

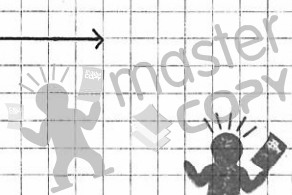
$h^{-1}(y) = \sqrt{y}$



$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

$f(x) = \sqrt{x}$







$A \xrightarrow{f} B \qquad B \xrightarrow{f^{-1}} A$

$f^{-1} \circ f$

$f^{-1} \circ f : A \to A$

$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a$ IDENTITÀ DI A

$B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$

$f \circ f^{-1}$

$f \circ f^{-1} : B \to B$

$f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = b$ IDENTITÀ DI B

Esercizio

$a, b, c \in \mathbb{R}$ .....

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

① quando è suriettiva
② quando è iniettiva

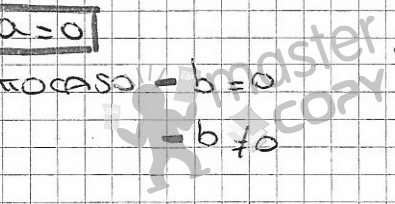
al variare di a, b, c

CASO $a = 0$

↳ sottocaso $-b = 0$

- Se $b = 0$, $f(x) = c$ la funzione è costante.
  NON È NÈ INIETTIVA NÈ SURIETTIVA.
- Se $b \neq 0$ $f(x) = bx + c$ la funzione è una retta.
  SIA SURIETTIVA SIA INIETTIVA, BIGETTIVA

$-b \neq 0$





è invertibile sarà: $y = bx + c$

$y - c = bx$

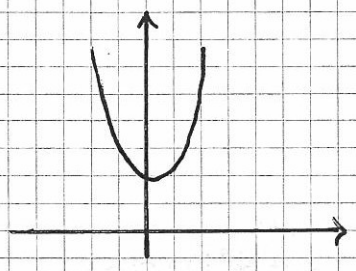
$x = \frac{y - c}{b}$

$f^{-1}(y) = \frac{y - c}{b}$

CASO $a \neq 0$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

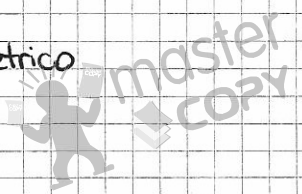




NON È NÈ INIETTIVA
NÈ SURIETTIVA

p.d.v. algebrico

p.d.v. geometrico



Con $k \in \mathbb{R}$

INIETTIVITÀ quante radici ha l'equazione $ax^2 + bx + c = k$
si guarda il <u>discriminante</u>

$ax^2 + bx + c - k = 0$

$\Delta = b^2 - 4a(c - k)$

si può sempre trovare un k tale che $\Delta > 0$
↓
NO INIETTIVITÀ

SURIETTIVITÀ $ax^2 + bx + c = t$ ha sempre soluzioni per $t \in \mathbb{R}$?
Si guarda il <u>discriminante</u> che se è < 0 non c'è suriettività.

SPAZI VETTORIALI

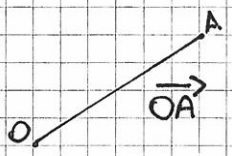
Vettori geometrici nel piano

$= \mathcal{A}^2$ piano euclideo

A, B punti di $\mathcal{A}^2$ individuano il segmento $\overline{AB}$ di lunghezza $\ell(\overline{AB})$

- Si fissa un punto $O \in \mathcal{A}^2$ (origine) per definire il VETTORE APPLICATO

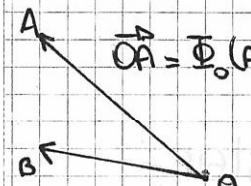
UN VETTORE APPLICATO IN O È UN SEGMENTO ORIENTATO IN $\mathcal{A}^2$ CON PRIMO ESTREMO IN O E SECONDO ESTREMO UN PUNTO $A \in \mathcal{A}^2$



[Notazione $\overrightarrow{OA}$]

- Indichiamo con V_O^2 L'INSIEME DEI VETTORI APPLICATI IN O.

Si può definire una funzione bigettiva



$$\Phi_O : \mathcal{A}^2 \to V_O^2$$

$\Phi_O(A)$ è il vettore applicato in O che ha il punto A come secondo estremo (cioè $\overrightarrow{OA}$)

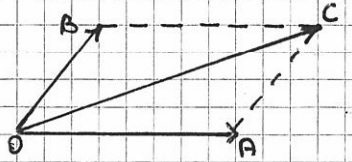
L'inversa sarà: $\Phi_O^{-1} : V_O^2 \to \mathcal{A}^2$, $\Phi_O^{-1}(\overrightarrow{OA}) = A$ → Φ_O^{-1} applicata ad un vettore dà il secondo estremo di ↑

È definito il vettore $\overrightarrow{OO}$ (vettore nullo)

Definiamo un'operazione di somma su V_O^2.

$$V_O^2 \times V_O^2 \to V_O^2$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \to \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$



DATI DUE VETTORI $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in V_O^2$, LA SOMMA DI $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ È IL VETTORE $\overrightarrow{OC}$ TALE CHE IL PUNTO C È IL QUARTO VERTICE DEL PARALLELOGRAMMA INDIVIDUATO DA O, A, B, OPPURE SI TRASLA IL VETTORE $\overrightarrow{OA}$ IN MODO TALE CHE IL PUNTO DI ORIGINE SIA IN B E IL NUOVO ESTREMO COSÌ OTTENUTO È IL PUNTO C.