~ Calcolo Numerico ~

- fabio.durastante@unipi.it
- LIBRI su E-LEARNING
- Mathlab
- Esame Orale con prova a scelta multipla x accedere con appunti

Lezione 1: Introduzione

25.09.23

Gli Algoritmi che vedremo si basano su:
- Accuratezza ed Errori;
- Tempo di calcolo.

1. Accuratezza ed Errore:

Siccome si eseguiranno in un COMPUTER = Macchina finita

Quale è il più grande intero che può essere rappresentato? DIP. ARITMETICA

ESEMPIO:

Computer che esprime i numeri in base 10, ma usa solo 2 cifre:

1• OPERAZIONE: $0,57 \cdot 0,41 = 0,23\cancel{4}$

↳ si perde con aritm. a 2 cifre

Si perde parte dell' Info $\Leftarrow$ a 2 cifre

2.• OPER. $a = 1 \cdot 10^{-15}$

1) $b = (1+a) - 1 = a$

$\tilde{b} = 1{,}110233 \ldots \times 10^{-15} \neq a\,!$ ~ Problema di RAPPRESENTAZ.

• 2) $a = 1 \cdot 10^{-16}$

$\tilde{b} = 0 \neq a\,!$ ~ Probl. di CIFRE

⇒ Siccome le macchine lavorano in base binaria, si commettono errori nella rappresentazione quando si converte.

3.• EQUAZIONE: $x^2 - qx + 1 = 0$ con $q = \frac{p^2+1}{p}$

SOL. ALG

$$x_1 = \frac{q - \sqrt{q^2-4}}{2} = \frac{1}{p}$$

$$x_2 = \frac{q - \sqrt{q^2-4}}{2} = p$$

SOL. CALC.

- $p = 10^8$
  - $\tilde{x}_1 = 7. \ldots 10^{-9}\,!$
  - $\tilde{x}_2 = 10^8$ ✓
- $p = 10^9$
  - $\tilde{x}_1 = 0$ ~ NON lo calcola
  - $\tilde{x}_2 = 10^9$ ✓

⇒ Le somme (+) sono più STABILI; mentre le differenze creano problemi.

⇒ Il probl. è anche legato alla magnitudine dei numeri dentro l' algoritmo

DEFINIZIONI:

- ERRORE ALGORITMICO: l' errore generato x svolgere operazioni in precisione finita
- ERRORE INERENTE: l' errore dovuto ad aver rappres. i numeri in precisione FINITA (= usando un num. finito di cifre)

Questi errori devono essere LIMITATI inserendo la limitazione dell' algor. in INPUT

ESEMPIO: Risolvere il sist. lineare:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 1001\,x + 1000\,y = 2001 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 1)$$

Se la precisione in $\mathbb{N}$ è bassa $\Rightarrow$ il sist. perturbato è: $(1 + 1/1000)x + y = 2$

$\Rightarrow \tilde{x} = -1/9$ e $\tilde{y} = 1901/900$

questo errore NON dip. dall' algoritmo scelto (abbiamo risolto in modo esatto)

$\Rightarrow$ si parla di PROBL. MALCONDIZIONATO: piccole variaz. dell' INPUT da grande variaz. dell' output

ES. di Probl. Malcondizionato $\rightarrow$ quando si hanno pochi dati e si vuol ricostruire un' info.

Come capire se un Problema è MALCONDIZIONATO

Sia f: funzione scalare e derivabile, $x \neq 0$: $f(x) = 0$
Quando il calcolo di f è MALCONDIZIONATO?

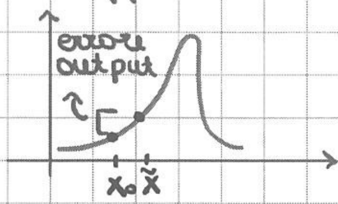
- x è Perturbata $(d) \rightarrow f(x(1+d))$
  dip. da quanto è grande x
- ERRORE RELATIVO è: $r = \dfrac{f(x(1+d)) - f(x)}{f(x)}$

Valutiamo il comportamento di r/d man mano che $d \to 0$:

$$\lim_{d \to 0} r/d = \lim_{d \to 0} \frac{f(x + xd) - f(x)}{d\,f(x)} \cdot \frac{x}{x} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$\Rightarrow$ è indip. dalla perturbaz. e ci misura quanto è sensibile calcolare la funz., scalare derivabile, in un punto $\neq 0$ in modo quantitativo: chiamiamo $\frac{r}{d}$ NUMERO di CONDIZIONAMENTO

Tanto è maggiore $f'(\bar{x})$, maggiore è l' effetto della perturbazione:



2. Considerazioni sul Tempo di Calcolo:

ESEMPIO: Risolvere un sist lineare:

$A\underline{x} = \underline{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\det A \neq 0$; $\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

ALGOL. SOLUZ: Met. Cramer

$$A_J = \begin{bmatrix} & \boxed{b} & \end{bmatrix} \qquad x_J = \frac{\det(A_J)}{\det A} \quad \text{con } J = 1, \dots, n$$

↳ J-esima colonna

Per calcolare det(A) si usa Teo Laplace:

$$\det(A) = \sum_{J=1}^{m} (-1)^{J+1} a_{1J} \det(A_{1J}) \qquad \text{con } A = \begin{bmatrix} x & \\ & \begin{bmatrix} A_{1J} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Si deve contare il num. di moltiplicazioni x valut. il Tempo:

C_m = (# moltiplicaz. x A di dimens. m)

$$C_2 = 2 \Rightarrow C_m = m \cdot \underbrace{C_{m-1}}_{(m-1)(C_{m-2})\dots} + \overset{\text{Somme}}{m} \geq m C_{n-1} \geq \overset{m(m-1)(m-2)\dots\cdot 2}{m!}$$

$\Downarrow$

per calcolare x_J: $C_m \sim (m+1)!$ operazioni

si deve considerare anche $\det A_J / \det A$

Considerando un processore di CLOCK 3.2 GHz (= misura FLOPS):

$3{,}2 \cdot 10^9$ Hz $\Rightarrow$ 1 FLOP $= 3 \cdot 10^{-10}$ s

L' algoritmo dura: $(m+1)! \cdot 3 \cdot 10^{-10}$ s

$\rightsquigarrow$ per $m = 99$ $\Rightarrow (100)! \cdot 3 \cdot 10^{-10}$ s $\sim 8{,}87 \cdot 10^{140}$ anni !

$\Rightarrow$ Met. Kramer NON è utile x calcolo numerico.

ANALISI dell' ERRORE: come stimare l'errore dovuto all'aritmetica finita?

RAPPRESENTAZIONE in BASE:

TEOREMA: Sia $x \in \mathbb{R}, \neq 0$; allora esistono unici il numero p intero e la successione $\{d_i\}_{i=1,2\dots}$ di numeri interi: $0 \leq d_i \leq \beta-1$ ($d_1 \neq 0$, e d_i non def uguali a $\beta-1$, → def. l'unicità della rappres.

tali che: $x = \text{sgn}(x)\, \underbrace{\beta}_{\text{base}}^{\overset{\text{esponente}}{p}} \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} d_i \beta^{-i}}_{\text{MANTISSA}}$ = Rappres. NORMALIZZATA

$\equiv \begin{cases} \text{fissati gli altri parametri, tutti i numeri si scrivono } 0.\text{qlc} \\ \text{con qlc} \neq 0 \text{ e } \beta \equiv \text{num. cifre usate } \{10 \circ 2 \circ 16\} \\ \text{ATT! lo } 0 \text{ NON è definito} \end{cases}$

⇒ qualunque numero, in qualunque base può essere convertito in qst scrittura

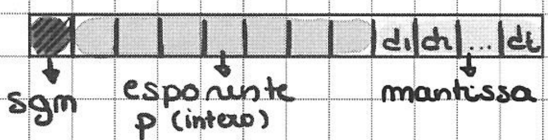
Come si limita questa scrittura? (p e la serie che → ∞)

DEF. $\mathcal{F}_{\beta, \underbrace{m, M}_{\text{limitano } p}, t \geq 1} = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{sgn}(x)\, \beta^p \sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i},$ ↳ limita la serie

$-m < p < M;\ d_1 \neq 0,\ 0 \leq d_i < \beta\}$

- in macchina 0 si scrive fissando tutti $d_i = 0$ e $p = m-1$ (= si fissa uno standard)

ES. $\beta = 2$ - Come è codificato un numero?



~ codifica di num. come insieme di bit

La codifica segue uno STANDARD: EEE-754

- le unità di memoria ora sono: (le unità di mem ora sono:

- FP 64 → 1 bit segno, 11 bit espon, 52 bit matissa
  ↳ è un Double = num. in precisione doppia
- FP 32 → 1 bit segno, 8 bit espon, 23 bit matissa
  ↳ è un single = num. in precisione singola

RAPPRESENTAZIONE dei NUMERI ed ERRORI

Lez. 2. 26/09

$\mathcal{F}_{\beta,m,M,t>0} = \{0\} \cup \{x = sgm(x)\,\beta^p \sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-1},\ 0 \le d_i \le \beta,\ d_1 \ne 0$

$-m < p < M\}$ = Insieme di Numeri Macchina

<u>Cod. ∅</u> : $d_1 = \dots = d_t = 0$, $p = -m$

Dato un num. in imput, come si mappa in qsta forma?

$\mathbb{R} \ni x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

$\lfloor x \rfloor$: floor, intero
$\{x\}$: parte frazionaria, $0 < \ < 1$

CONVERSIONE in BINARIO: $5_{10} = 101_2 = 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2$

Se il numero ha c_i cifre:
$i \leftarrow 0$
ripetiamo $i \leftarrow i+1$
$c_i \leftarrow x \bmod \beta$ (resto)
$x \leftarrow x \operatorname{div} \beta$ (quozien.)
finchè $x = 0$
$p \leftarrow i$
per $i \leftarrow$ da 1 a p $\quad d_{ij} = c_{p+1-i}$

$5 = 2 \cdot \underset{\beta}{2} + \overset{c_1}{1}$ $\qquad c_1 = 1$

$2 = 1\,2 + \overset{c_2}{0}$ $\qquad c_2 = 0$

$1 = 0\,2 + \overset{c_3}{1}$ $\qquad c_3 = 1$

legge

- Conversione di un decimale in binario

1. Calcolare p : quale β^p deve essere moltiplicato il numero per avere la 1° cifra dopo la virgola: $d_1 \ne 0$

$0,00101 = 0,\underbrace{0}_{d_1 \cancel{=} 0}101 \cdot 10^{-1} = 0,\underbrace{1}_{d_1 \ne 0\ \checkmark}01 \cdot 10^{-2}$

⇒ Algoritmo:

$p = 1$
finchè $\lfloor x \rfloor = 0$ (parte intera) $\quad x \leftarrow \beta x$ e $p \leftarrow p-1$
end

2. Espansione in cifre:

$i \leftarrow 0$
ripeti