Appunti delle Lezioni

master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

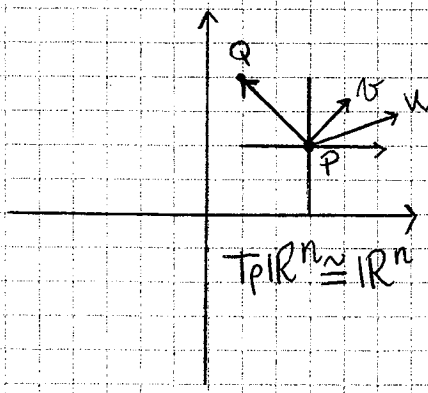

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

2/03/16

2ª

DISTANZA: $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to$ tale che:

- (i) $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q)=0 \iff P=Q$
- (ii) $d(P,Q)=d(Q,P) \quad \forall P,Q$
- (iii) $d(P,Q) \leq d(P,Q)+d(R,Q) \quad \forall P,Q,R$



$P=(3,1)$ $Q=(1,4)$

$d(P,Q)=\sqrt{(3-1)^2+(1-4)^2}$

$T_P\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

- Posso sommare i vettori
- Posso moltiplicare per uno

} POSSO FARLO SOLO TRA I VETTORI CHE HANNO LO STESSO PUNTO DI BASE

NORMA: $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:

- (i) $\|v\| \geq 0 \ \forall v$ e $\|v\|=0 \iff v=0$
- (ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \ \forall v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- (iii) $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\| \ \forall v,w$

• IN OGNI PUNTO È DEFINITA UNA FUNZIONE DETTA NORMA!

• La distanza $d(P,Q) := \|vPQ\|$, dove:

- $vPQ \in T_P\mathbb{R}^n$

$vPQ = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $P=(P_1,P_2,\dots,P_n)$, $Q=(q_1,q_2,\dots,q_n)$

$\Rightarrow v_i = q_i - P_i \quad \forall i=1,\dots,n$

[• vPQ "=" $-vPQ$]

NORMA EUCLIDEA:

$v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$: $\|v\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2}$

DISTANZA EUCLIDEA:

- $P=(P_1,\dots,P_n)$ e $Q=(Q_1,\dots,Q_n)$

$d(P,Q)=\sqrt{(P_1-Q_1)^2+(P_2-Q_2)^2+\dots+(P_n-Q_n)^2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2/03/16

1°

Scrivere come funzione:

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $A = (a\ b)$ = matrice 1×2

$P(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$L(P) = ax+by = L(x;y)$ = funzione lineare a due variabili

- Immagine di L = {sottoinsieme di $\mathbb{R}$ → $z \in \mathbb{R}$: $\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $L(x;y) = z$}

  ↳ [redacted]

- Grafico di L = $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : (x;y) \in Dom\ L\ ;\ z = L(x;y)\}$ ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$)

  = $\{z = ax+by\}$ ⇒ equazione di un piano; è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

- Assume un massimo e un minimo?

  $P \in \mathbb{R}^2$ è massimo assoluto per L se $L(P) \geq L(Q)$ $\forall Q \in \mathbb{R}^2$

  $\sup(Im\ L) = \{+\infty$ o "0"; se $a=b=0\}$

→ LA DIMENSIONE DELL'IMMAGINE DIPENDE ESCLUSIVAMENTE DALLO SPAZIO DI PARTENZA

$-\mathbb{R} < \overset{\circ}{+\infty}$

- $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $A = 3\times 2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

- $Im\ L = \begin{cases} 0;\ A = 0 \\ span(v) \\ span(v;w) \end{cases}$ ⇒ ce lo dice il rango! / $rg(A) = 1$ → retta; $rg(A) = 2$ → piano

$\mathbb{R}^n$ → Insieme di punti dotati di una distanza = SPAZIO METRICO

- "0" = origine
- $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbb{R}^2$, $P = (x;y)$, $\mathbb{R}^3$, $P = (x;y;z)$

MASTER COPY Tel. 050 831 2126 Cell. 388 9837745
MASTER COPY COPISTERIA 050/831 2126 388/9837745

Spazio metrico:

2/03/16

DEFINIZIONI: Sia $P \in \mathbb{R}^n$ e sia $\varepsilon > 0$ si dice:

- INTORNO SFERICO DI P E RAGGIO ε l'insieme:

$$B_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : d(P,Q) < \varepsilon\}$$

- SFERA DI CENTRO P e RAGGIO ε l'insieme:

$$S_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : d(P,Q) = \varepsilon\}$$

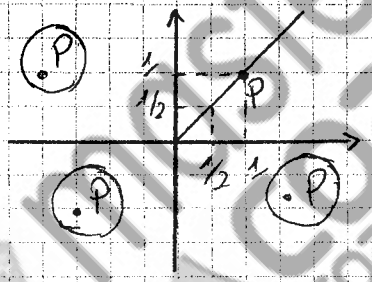
Topologia: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$

- Un punto $P \in \mathbb{R}^n$ si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE di E se

$$\{\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q \in E, Q \neq P \text{ t.c. } Q \in B_\varepsilon(P)\ \}$$

- ESEMPIO:

$$E = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n \geq 1}$$

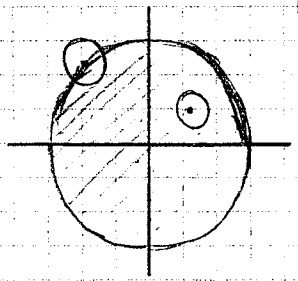


- Sostituisco numeri a $n \geq 1$ e sono sempre più vicini all'origine

- $Acc(E) = \{(0,0)\}$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q \in E, Q \neq (0,0)$ t.c. $\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Se $Q = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\quad d(P,Q) = \frac{\sqrt{2}}{n}$

- DEFINIZIONE: Un punto $P \in E$ si dice ISOLATO se non è di accumulazione.



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745