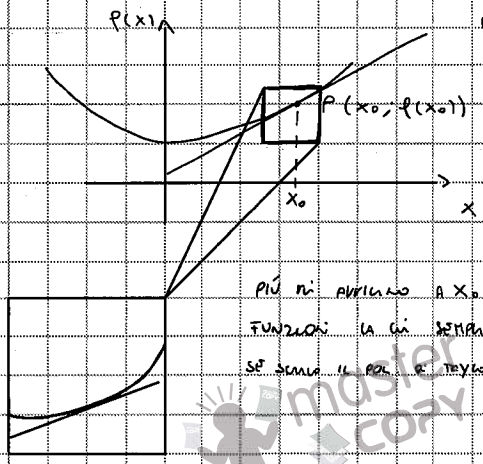
master COPY

- INTRODUZIONE 1 - 5
- SPAZI VETTORIALI 6 - 8
- FUNZIONI e LIMITI 9 - 18
- WEIERSTRASS e TEOREMA DEGLI ZERI 19
- INSIEME DI LIVELLO 20
- DERIVATE DIREZIONALI 21
- DIFFERENZIABILITÀ e TEOR. CARATTERE GENERALE 23 - 27
- COORDINATE POLARI e SFERICHE 27 - 28
- DIFF. di FUNZIONI COMPOSTE 28 - 29
- CURVE 30 - 31
- DERIVATA SECONDA, MATRICE HESSIANA e TAYLOR 2° ORD. 32 - 34
- MASSIMI, MINIMI RELATIVI e TIPI di MATRICE HESSIANA 35 - 44
- PARAMETRIZZAZIONI 45 - 49
- SUPERFICI; CARTESIANE e di ROTAZIONE 50 - 57
- TEOREMA DELLA FUNZ. IMPLICITE CON COROLLARIO 57 - 61
- RICERCA DEI PUNTI CRITICI VINCOLATI 62 - 66
- CALCOLO INTEGRALE, INSIEME SEMPLICE, FORMULE di RIDUZIONE e CAMBIO di VARIABILE 67 - 75
- INTEGRALI IN R^3, PER FILI e STRATI 75 - 79
- INTEGRALI CURVILINEI e DI SUPERFICIE 79 - 81
- CAMPI di VETTORI, ROTORE e DIVERGENZA 82 - 85
- LAVORO 86 - 92
- FLUSSO DI UN CAMPO e TEOR DELLA DIVERGENZA 92 - 93

master COPY

CENNI DI APPLICAZIONI LINEARI (STRUMENTO PER CONTINUARE APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI)



ESISTE LA RETTA t_y AL GRAFICO IN QUEL PUNTO

PIÙ MI AVVICINO A X_0 PIÙ LA CURVA ASSOMIGLIA ALLA RETTA QUINDI FUNZIONI LA CUI RAPPRESENTAZ È UNA RETTA SONO APP LINEARI

SE SCRIVO IL POL DI TAYLOR $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + d$

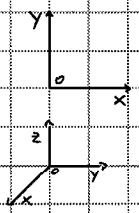
DEFINISCO $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots$ PRODOTTO DEFINITO N VOLTE

SPAZIO FISICO (DEFINITO IN $\mathbb{R}^n$) UTILE PER RAPPRESENTARE LA POSIZIONE DI PUNTI

QUINDI AVRÒ ...

$\mathbb{R}^2$ = PIANO CARTESIANO

$\mathbb{R}^3$ = SPAZIO



- DEFINISCO UN PUNTO P DI $\mathbb{R}^n$ ($P \in \mathbb{R}^n$) COME $P = (P_1; P_2 \ldots P_n)$
- NEL PIANO DI $\mathbb{R}^2$ $P \in \mathbb{R}^2 = (x; y)$

  $\mathbb{R}^3$ $P \in \mathbb{R}^3 = (x; y; z)$

DISTANZA (d)

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (PROD CARTESIANO DI DUE COPIE DELLO SPAZIO FISICO)

1ª PROP PER OGNI COPPIA $P; Q$ DELLO SPAZIO FISICO $d(P; Q) \geq 0$

$d(P; Q) = 0 \iff P = Q$

2ª PROP $d(P; Q) = d(Q; P)$ PER $\forall P; Q \in \mathbb{R}^n$

3ª PROP (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE) → EGUAGLIANZA CHE VALE NEI TRIANGOLI

PER $\forall P; Q; R \in \mathbb{R}^n$ SI HA CHE $d(P; R) \leq d(P; Q) + d(Q; R)$

PER NATURA SI INTENDE LA METRICA EUCLIDEA QUINDI PER $\forall P; Q \in \mathbb{R}^n$

$P = (P_1 \ldots P_n)$ ALLORA $d(P; Q) = \sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2 \ldots (P_n - Q_n)^2}$

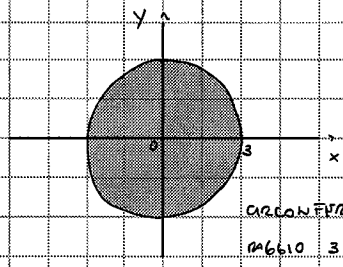
$Q = (Q_1 \ldots Q_n)$

master copy

ESEMPIO

CONSIDERO $O(0;0) \in \mathbb{R}^2$

$$X = \{ P \in \mathbb{R}^2 : d(P;O) < 3 \}$$ NOTAZ. SINTETICA



INSIEME DEI PUNTI $P(x;y) \in \mathbb{R}^2$ PER CUI $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < 3$

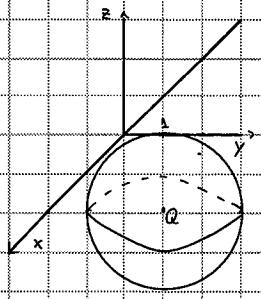
CIRCONFERENZA DI CENTRO O E RAGGIO 3, POICHÉ È SOLO < LA LINEA NON È CONTORNATA

QUINDI: $x^2+y^2 < 9$

ESEMPIO

$Q(2;1;0) \in \mathbb{R}^3$

$$X = \{ P \in \mathbb{R}^3 ; d(P;Q) > 2 \}$$



$(x-2)^2+(y-1)^2+(z)^2 > 4$

CERCO $P(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ PER CUI $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2} > 2$

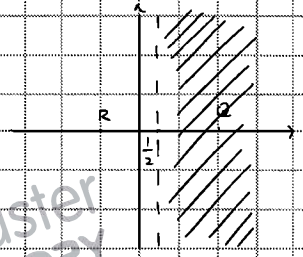
ESEMPIO

$Q = (2;0)$

$R = (-2;0)$

$$X = \{ P \in \mathbb{R}^2 : d(P;Q) < d(P;R) \}$$

QUINDI $= \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} < \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2} \}$



ALLE DEL SEGMENTO SI TROVA ALLA STESSA DISTANZA DAI DUE PUNTI IN QUESTO CASO PARI A $x > \frac{1}{2}$ (NON SAREI STATO IN GRADO DI SCRIVERLA, SOLO DA QUESTA CONDIZIONE, IN CUI MI TROVAVO)

DEF DATO UN PUNTO $P \in \mathbb{R}^n$ E $\varepsilon > 0$ SI DICE INTORNO (SFERICO) DI P DI RAGGIO ε L'INSIEME $B_\varepsilon(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^n : d(P;Q) < \varepsilon \}$ PUNTI ALL'INTERNO DI UN CERCHIO ε (NEL CASO DI $\mathbb{R}^3$ ALL'INTERNO DI UNA SFERA)

DEF DATO $P \in \mathbb{R}^n$ E $\varepsilon > 0$ SI DICE SFERA DI CENTRO P E RAGGIO ε L'INSIEME

$$S_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : d(P;Q) = \varepsilon\}$$

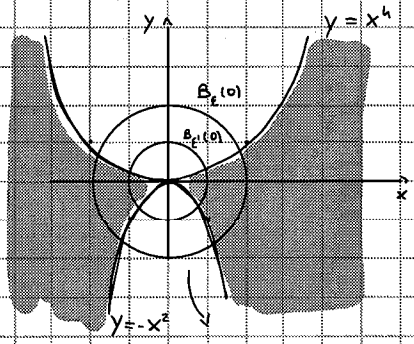
DEF SIA $X \subset \mathbb{R}^n$ SI DICE UN PUNTO $P \in \mathbb{R}^n$ (ANCHE NON DI X) È PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI X SE PER $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ UN PUNTO $Q \in X$ APPARTENENTE $(\cap)$ $B_\varepsilon(P) - \{P\}$

ESEMPIO $X = (0;2) \in \mathbb{R}$ 0 È PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI X

FISSO $\varepsilon > 0$ $\exists\, x \in (0;2) \cap B_\varepsilon(0)$ CON $x \neq 0$

$\exists\, x \in (0;2)$ CON $|x| < \varepsilon$ $x \neq 0$

ESEMPIO $X = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 < y < x^4\}$



0 È PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI X

POSSIAMO FISSATO UN UN INTORNO SEMPRE QUALSIASI DI 0 DOVE TROVIAMO UN PUNTO DELL'INSIEME $\neq 0$

BASTA UNA PALLINA PUNTATA IN X CON $X \neq 0$

DEF SIA $X \subset \mathbb{R}^n$, $P \in X$ SI DICE PUNTO ISOLATO SE $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \cap X = \{P\}$

QUINDI: TUTTO ZERO È PUNTO P

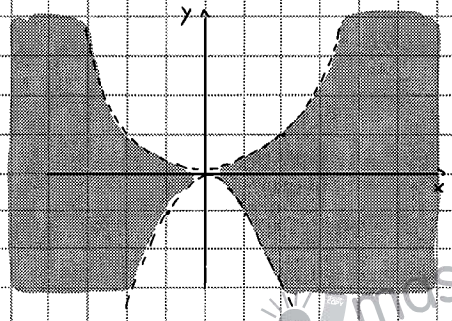
DEF DATO $X \subset \mathbb{R}^n$ UN PUNTO ...

- $P \in X$ SI DICE INTERNO SE $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \subset X$
- $P \in \mathbb{R}^n$ SI DICE ESTERNO SE $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \cap X = \emptyset$
- $P \in \mathbb{R}^n$ SI DICE DI FRONTIERA SE NON È INTERNO NÉ ESTERNO

E POSSONO O NO È PUNTO DELL'INSIEME

ESEMPIO QUALI SONO I PUNTI INTERNI, ESTERNI E DI FRONTIERA

$X = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 < y < x^4\}$ $T(0;0)$ QUALUNQUE PALLA $B_\varepsilon(\varepsilon) \neq T \in X$



- PUNTI INTERNI $\mathring{X} = X$ POICHÉ CONTIENE TUTTI I PUNTI NELL'INSIEME
  $-x^2 < y < x^4$
- PUNTI ESTERNI
  $y > x^4 \vee y < -x^2$
- PUNTO DI FRONTIERA $\partial X = \{y = x^4 \cup y = -x^2\}$

UNIONE $\bar{X} = X \cup \partial X = -x^2 \leq y \leq x^4$

master COPY