10/10/3/16

ANALISI MATEMATICA II

Pagina web:

HTTP://PAGINE.DM.UNIPI.IT/BONANNO/DIDATTICA.HTML

CLAUDIO.BONANNO@UNIPI.IT

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ applicazione lineare

$A: (a\ b)$ matrice associata

$P(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$L(P) = AP = ax + by = L(x;y)$

$D = \mathbb{R}^2$ (dominio)

$C = \mathbb{R}$ (codominio)

$Imm(L) = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x;y) \in \mathbb{R}^2 : L(x;y) = z\}$

Grafico $L = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : (x;y) \in D \wedge z = L(x;y)\}$

In questo caso $= \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : z = ax + by\}$

$z = ax + by$ è un PIANO

Il grafico di un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ è un PIANO.

DEFINIZIONE: PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO

$P \in \mathbb{R}^2$ si dice punto di max. assoluto per L se:

$L(P) \geq L(Q)\ \forall\ Q \in \mathbb{R}^2$

$\sup(Imm\ L) = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} \\ a, b = 0 \end{matrix}$ $\qquad P = \sup(Imm\ L)$

Insieme di livello $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$I = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : L(x;y) = c\}$ $c \in \mathbb{R}$

$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$

↑ questa è una RETTA


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

$L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$A: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad P: (x) \in \mathbb{R}$ $\quad L(x) = (ax, bx)$

$\text{Imm } L = \begin{cases} 0 \text{ (vettore nullo) se } a,b = 0 \\ \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle \text{ (sottospazio generato dal vettore } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \text{ se } a \neq 0 \text{ e/o } b \neq 0 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} \quad C = \mathbb{R}^2$

L'immagine è un sottospazio del codominio (potrebbe avere dimensione 0, 1 o 2). In questo caso la dimensione dell'immagine può essere al massimo 1 perché è la dimensione dello spazio di partenza (Teo. della dimensione)

Insieme di livello

$I = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} ax \\ bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

$\text{Imm } L = \begin{cases} 0 & A \text{ mat. nulla} \\ \text{span}(\vec{v}) & \text{rg}(A) = 1 \text{ RETTA} \\ \text{span}(\vec{v}, \vec{w}) & \text{rg}(A) = 2 \text{ PIANO} \end{cases}$

$D = \mathbb{R}^2 \quad C = \mathbb{R}^3$

L'immagine è uno dei sottospazi dello spazio di partenza, cioè del dominio (non può essere $\mathbb{R}^3$)

$\mathbb{R}^n$ Spazio Metrico

O origine $\quad P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ generico punto $P \in \mathbb{R}^n$ (cioè con n coordinate)

$O(0, 0, \ldots, 0)$ (n coordinate tutte uguali a 0)

$P(x; y) \in \mathbb{R}^2$

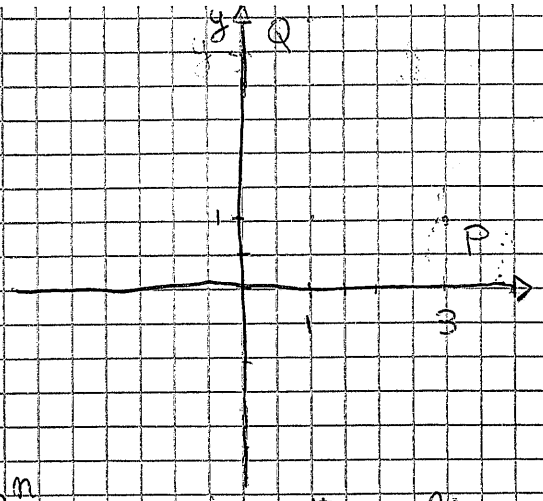
$P(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

DISTANZA: $d = \mathbb{R}^n \cdot \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $d(P;Q) \geq 0 \ \forall P,Q \ \wedge \ d(P;Q) = 0 \iff P = Q$

(ii) $d(P;Q) = d(Q;P)$ (simmetria)

(iii) $d(P;Q) \leq d(P;R) + d(R;Q) \ \forall P,Q,R$ (disuguaglianza triangolare)



$P(3;1) \quad Q(1;4)$

$d(P;Q) = \sqrt{(3-1)^2+(1-4)^2}$

R^m spazio vettoriale $T_P R^n = \{\text{vettori di } R^m \text{ applicati in } P\}$

Tutti i vettori di uno spazio vettoriale sono applicati nello stesso punto

NORMA $\|\cdot\| : R^m \to R$ tale che:

(i) $\|V\| \geq 0 \ \forall V$ e $\|V\| = 0 \iff V = 0_V$

(ii) $\|\lambda V\| = |\lambda| \cdot \|V\| \quad \forall V$ e $\forall \lambda \in R$

(iii) $\|V+W\| \leq \|V\| + \|W\| \quad \forall V, W$ (disuguaglianza triangolare)

La distanza $d(P;Q) := \|V_{P,Q}\|$

$V_{P,Q}$: vettore V applicato in P e che termina in Q

$\|V_{P,Q}\| \in T_P R^m$

$V_{P,Q} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix}$ dove $P(P_1, P_2, \dots, P_m)$ e $Q(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$

$\Rightarrow V_i = Q_i - P_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$

ogni componente di V è la differenza delle componenti di Q e P corrispondenti.

$d(Q,P) = \|V_{Q,P}\| \in T_Q R^m$

$V_{Q,P} \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{pmatrix} \Rightarrow V'_i = P_i - Q_i = -V_i$ cioè $V_{Q,P} = -V_{P,Q}$

$\|V_{Q,P}\| = |-1| \, \|V_{P,Q}\| = \|V_{P,Q}\|$

cioè $d(P,Q) = d(Q,P)$ (ho dimostrato la seconda proprietà della distanza)

NORMA EUCLIDEA:

$v\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \qquad \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2}$

DISTANZA EUCLIDEA: $P(P_1, \dots, P_m) \quad Q(Q_1, \dots, Q_m)$

$d(P;Q) = \sqrt{(Q_1 - P_1)^2 + \dots + (Q_m - P_m)^2}$

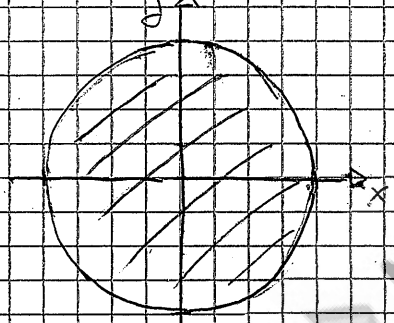
ESERCIZI

1) Dati $P(1;2;0)$ e $Q(3;1;1)$

allora $d(P;Q) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

2) Disegnare $X = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P;O) < 2\}$

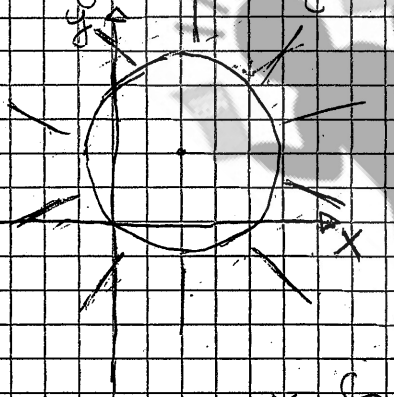
↑ distanza dall'origine



Punti interni alla circonferenza di centro O e raggio 2 (bordo escluso)

3) Disegnare $X = \{d(P;(1;1)) > \sqrt{2}\}$

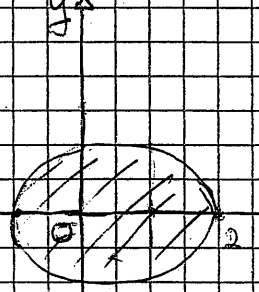
↑ distanza dal punto $(1;1)$



Punti esterni alla circonferenza di centro $(1;1)$ e raggio $\sqrt{2}$ (bordo escluso)

4) Disegnare $X = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,O) + d(P,(1;0)) \leq 3\}$

$P(X;y)$



Punti interni all'ellisse con fuochi O e $(1;0)$ e somma delle distanze uguale a 3 (bordo incluso)

Es.

$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq 3$