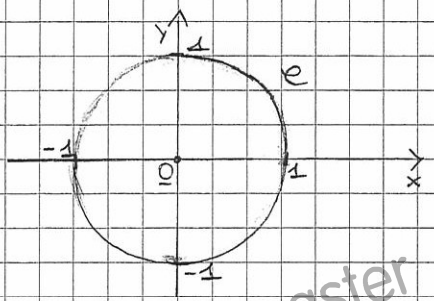
# FUNZIONE CARTESIANA

Data una funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ posso descriverla come:




$$e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1\}$$

tale funzione CARTESIANA può essere scritta come UNIONE di due insiemi.

insieme dei punti del piano — distanza tra due punti è $(\emptyset,\emptyset)$

$$e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ y = \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\cup$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1,\ x = \sqrt{1-y^2}\}$$

$g_+ : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_+(x) = \sqrt{1-x^2}$

grafico $g_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y = g_+(x)\}$

$g_- : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_-(x) = \sqrt{1-x^2}$

grafico $g_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y = g_-(x)\}$

Dunque posso scrivere che grafico $e = g_+ + g_-$

$\Rightarrow$ perciò due funzioni diverse con dominio e immagine diversi possono descrivere (in parte) il medesimo grafico.

# PROPRIETÀ degli SPAZI $\mathbb{R}^m$

Data una $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ con $m \geq 1$, $\mathbb{R}^m$ è un generale SPAZIO FISICO, indicherò un generico punto $P \in \mathbb{R}^m$ come $P(p_1, p_2, \dots, p_m)$ dove ogni coordinata $p_i$ è un numero Reale.

Si può rappresentare un'ancora più generica $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $n \geq 1$ e $m \geq 1$ come:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$ FUNZIONE a VALORI VETTORIALI

DOMINIO NATURALE: è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ per i cui elementi ha senso scrivere $f(x)$.

# DISTANZA EUCLIDEA

DEFINIZIONE: Si dice DISTANZA su $\mathbb{R}^m$ una funzione del tipo $d: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tale che verifichi le seguenti proprietà:

- (POSITIVITÀ), $\forall P,Q \in \mathbb{R}^m$ si ha $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$
- (SIMMETRIA), data una coppia qualsiasi di punti $P$ e $Q$, $\forall P,Q \in \mathbb{R}^m$ si ha $d(P,Q) = d(Q,P)$

  $\Rightarrow$ non dipende dall'ordine in cui considero i punti
- (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE), $\forall P,Q,R \in \mathbb{R}^m$ si ha che

  $$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$$

Queste sono le 3 proprietà che definiscono la DISTANZA come concetto applicabile a tutto e non solo a due punti.

CASO PARTICOLARE: $(P = Q)$

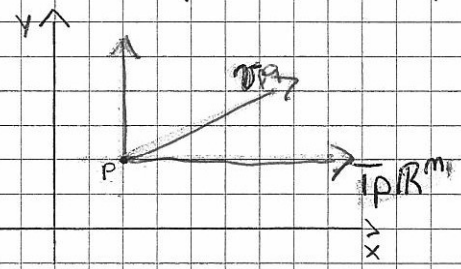
$$d(P,Q) \begin{cases} 1 & \text{se } P \neq Q \\ 0 & \text{se } P = Q \end{cases}$$




Dati due punti di coordinate $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ e $Q = (q_1, \dots q_m)$ la distanza tra i due punti $P$ e $Q$ è pari a:

$$d(P,Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_m - q_m)^2}$$ DISTANZA EUCLIDEA

Dato per esempio uno spazio $\mathbb{R}^2$, e considerando un punto $P = (x,y)$ posso definire uno spazio vettoriale particolare, ovvero lo spazio dei vettori passanti per $P$:




Indichiamo con $T_P\mathbb{R}^m$ SPAZIO TANGENTE a $\mathbb{R}^m$ in $P$, ovvero l'insieme dei vettori del tipo

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$ applicati in $P$

OSS. $T_P\mathbb{R}^m$ è uno spazio ISOMORFO a $\mathbb{R}^m$; dunque entrambi gli spazi hanno lo stesso numero $m$ di componenti.

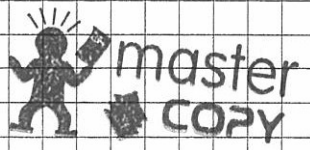
Questo spazio vettoriale si può usare per misurare le distanze.

# NORMA

**DEFINIZIONE:** Dato uno spazio vettoriale $T_p\mathbb{R}^m$ si definisce **NORMA** una funzione del tipo:

$$\|\cdot\|: T_p\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$ avente le seguenti proprietà:

1. $\forall v \in T_p\mathbb{R}^m$ si ha $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\forall v \in T_p\mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}$ si ha due:
$$\|t \cdot v\| = \|v\| \cdot |t|$$
3. $\forall v, w \in T_p\mathbb{R}^m$ si ha due:
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$




**DEFINIZIONE:** Si definisce NORMA EUCLIDEA una funzione del tipo:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + __ + v_m^2}$$

Dato $v \in T_p\mathbb{R}^m \setminus v = \begin{pmatrix} v_1 \\ | \\ v_m \end{pmatrix}$

NORMA EUCLIDEA

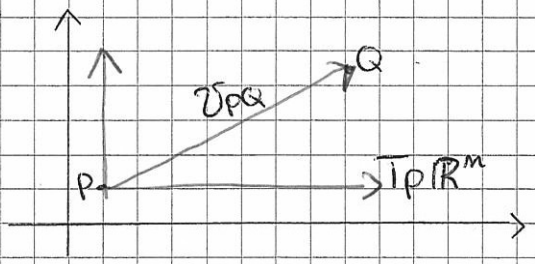






Dati due punti $P, Q \in \mathbb{R}^m$ e se $T_p\mathbb{R}^m$ è dotato di norma

$$d(P,Q) = \|v_{PQ}\| \text{ con } v_{PQ} \in T_p\mathbb{R}^m$$




$\Rightarrow$ posso interpretare la distanza tra due punti come la norma del vettore che collega i due punti.

$$v_{PQ} \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ | \\ q_m - p_m \end{pmatrix}$$ dati due punti: $\begin{cases} P = (p_1, p_2, __, p_m) \\ Q = (q_1, q_2, __ q_m) \end{cases}$

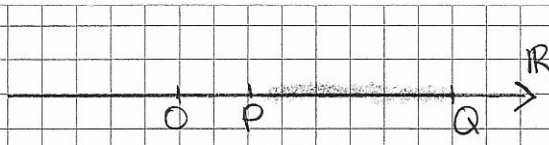



**IDEA!** una norma introduce una distanza ($d(P,Q) = \|v_{PQ}\|$), ma **NON** è necessariamente vero il contrario, dato che:

Avere uno spazio fisico con una NORMA $\Rightarrow$ Avere uno spazio fisico con una DISTANZA

Esempio

1. Dato uno spazio fisico con $(\mathbb{R}, d)$ con $\mathbb{R}$ = spazio fisico e $d$ = distanza euclidea. □



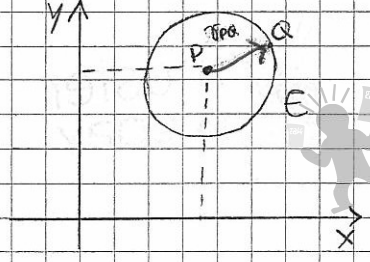

$P = (x)$
$Q = (x')$

$d(P,Q) = \sqrt{(x-x')^2} = |x-x'|$

$v \in T_p\mathbb{R}$, $v_{PQ} = (x'-x) \Rightarrow \|v_{PQ}\| = \sqrt{(x'-x)^2} = |x'-x|$

② (sul piano) $\mathbb{R}^2$, $d$, $P(1,1)$

descriviamo l'insieme $E = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \|v_{PQ}\| = 1\}$




$Q = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$v_{PQ} \in T_p\mathbb{R}^2$, $v_{PQ} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$\|v_{PQ}\| = 1 \iff \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 1$

$\iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ e $d(P,Q) = 1$

$E$ = è una circonferenza.

OSS. DISTANZA e NORMA in un generico spazio fisico $\mathbb{R}^m$ ci permette di ottenere sfere e circonferenze.

## INTORNO SFERICO

master COPY

Siamo in uno spazio fisico $\mathbb{R}^m$ con una distanza $\varepsilon = d(P,Q)$

DEFINIZIONE: Dati $P \in \mathbb{R}^m$ e $\varepsilon > 0$ si definisce INTORNO SFERICO di $P$ di raggio $\varepsilon$ l'insieme dei punti

$$B_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^m : d(P,Q) < \varepsilon\}$$ strettamente minore

$B$ = "ball", perché graficamente è una sfera.

OSS. se $m = 1$ allora $B_\varepsilon(P) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

DEFINIZIONE: Dato un insieme $E \in \mathbb{R}^m$ si dice che il punto $P \in \mathbb{R}^m$, è un punto di ACCUMULAZIONE per $E$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q \in E \cap B_\varepsilon(P) \neq \{P\}$$

OSS. $P$ può appartenere necessariamente a $E$.

master COPY

esempio

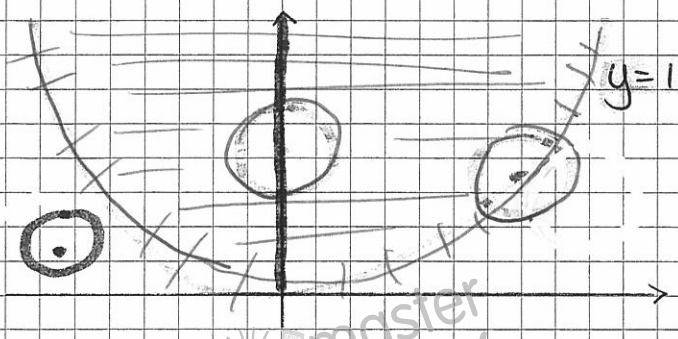
① $E = (a,b) \subset \mathbb{R}$ $\quad Acc(E) = [a,b]$




$B_\varepsilon(P) = (P-\varepsilon, P+\varepsilon)$

esempio

② $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|^3, \ x \neq 0\}$




- non la considero perché $x \neq 0$
- prendo un qualsiasi intorno sferico $B_\varepsilon(P)$:
  - se prendo punti sopra $y = |x|^3$ non sono punti di accumulazione
  - se prendo un punto $\notin E$, questo è comunque un punto di accum.

In conclusione ho che i punti di accumulazione sono tutti quei punti che verifica no la seguente condizione:

$$Acc(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|^3\}$$

**DEFINIZIONE**: Dato un insieme $E \in \mathbb{R}^m$ si dice che $P \in E$ è ISOLATO se

$$\exists\, B_\varepsilon(P) : B_\varepsilon(P) \cap E = \{P\}$$

$\Rightarrow$ i punti di accumulazione non devono necessariamente appartenere all'insieme

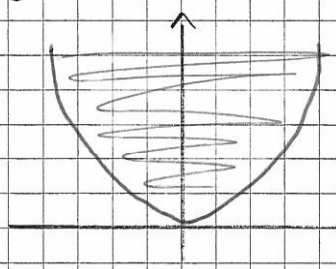
**IDEA**: i punti di accumulazione sono dunque quelli quando si parla di limiti.

**DEFINIZIONE**: Dato un insieme $E \in \mathbb{R}^m$ si dice che $P \in E$ è un punto INTERNO a $E$ se

$$\exists\, B_\varepsilon(P) : B_\varepsilon(P) \subseteq E$$

"$E^\circ$" = { punti interni a $E$ }

graficamente si ha che:




$$E^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in E \setminus y \neq |x|^3\}$$

**IDEA**: se prendo un punto dentro la curva non ho problemi; se invece ne prendo uno lungo la curva avrò sicuramente una parte dell'intorno che fuoriesce. □