$\mathbb{R}^m$ SPAZIO FISICO, SPAZIO METRICO

Insieme di punti nel quale è definita una distanza detta anche metrica

master COPY COPISTERIA

$\mathbb{R}^m$ dotato della distanza euclidea

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (P,Q) \longmapsto d(P,Q) := \sqrt{(P_1-Q_1)^2+(P_2-Q_2)^2+\dots+(P_m-Q_m)^2} \in \mathbb{R}_+$$

master COPY

- distanza → funzione $d: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ t.c.

i) $d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^m$ e $d(P,Q)=0 \iff P=Q$

ii) $d(P,Q) = d(Q,P) \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^m$

iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \quad \forall P,R,Q \in \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^m$ spazio fisico senza struttura di spazio vettoriale

$\mathbb{R}^m$ spazio metrico è lo spazio su cui considereremo i domini delle funzioni

non hanno motivo di essere spazi vettoriali

SPAZIO TANGENTE

Dato un punto P nello spazio metrico $\mathbb{R}^m$, consideriamo l'insieme delle possibili velocità iniziali di un moto curvilineo in $\mathbb{R}^m$ nel punto P. Queste velocità sono rappresentate da vettori applicati nel punto P e questi insieme uno spazio vettoriale traslato in P, ossia uno SPAZIO AFFINE.

master COPY

def Lo spazio tangente a $\mathbb{R}^m$ in un punto $P \in \mathbb{R}^m$, indicato con $T_P\mathbb{R}^m$, è uno SPAZIO VETTORIALE di dim n, isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$.

Considero come base di $T_P\mathbb{R}^m$ i vettori della base canonica $\{e_1,\dots,e_m\}$

$T_P\mathbb{R}^m = \text{Span}(e_1,\dots,e_m)$ dovremmo mettere una dipendenza dal punto P anche nei vettori della base. Ma non lo faremo per semplicità di notazione e perché useremo sempre gli stessi vettori come base degli spazi $\forall P$ $T_P\mathbb{R}^m \ \forall P$

$\mathbb{R}^m$ = spazio fisico sulla quale l'unica cosa che ci interessa è la distanza

$T_p\mathbb{R}^m$ = spazio vettoriale di dim m (dunque isomorfo a $\mathbb{R}^m$) di vettori applicati in P

Ci permettono di portare di incremento nello spazio fisico; cosa vuol dire spostarmi da un punto P a un punto Q, creare un incremento nello spazio fisico. Lo faccio muovendomi da P nella direzione che verrà identificata dal vettore $\underline{v}_{PQ}$ (vettore da P a Q).

Si dice norma una funzione $\|\ \| : T_p\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ t.c.

i) $\|\underline{v}\| \geq 0 \ \forall\ \underline{v} \in T_p\mathbb{R}^m$ e $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = 0$

ii) $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\| \quad \forall\ \underline{v}, \underline{w} \in T_p\mathbb{R}^m$

iii) $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \|\underline{v}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ \underline{v} \in T_p\mathbb{R}^m$

Su $T_p\mathbb{R}^m$ ho definito la comoda di norma che cambia, se uso la norma euclidea, al concetto di lunghezza di vettore

norma euclidea

$$T_p\mathbb{R}^m \ni \underline{v} \longmapsto \|\underline{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2}$$

distanza euclidea

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

— o —

def. Sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$ si dice INTORNO centrato in $\underline{x}$ e di raggio ε l'insieme

$$B_\varepsilon(\underline{x}) = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^m : d(\underline{x}, \underline{y}) < \varepsilon \}$$

insieme di elementi la cui distanza da $\underline{x}$ sia minore di ε

· Sfera di centro $\underline{x}$ e raggio ε

$$S_\varepsilon(\underline{x}) = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^m : d(\underline{x}, \underline{y}) = \varepsilon \}$$

In $\mathbb{R}^2$, $B_\varepsilon(\underline{x})$ non è altro che il cerchio di raggio ε e centro $\underline{x}$ privato della circonferenza, mentre $S_\varepsilon(\underline{x})$ è la circonf. di raggio ε e centro $\underline{x}$

Analogamente in $\mathbb{R}^3$ ($B_\varepsilon(x)$ palla privata sfera; $S_\varepsilon(x)$ è la sfera)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^m$

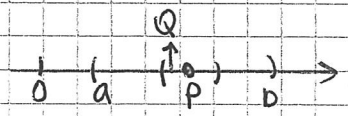
def Un punto $P \in \mathbb{R}^m$ è pto di accumulazione per E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, Q \in B_\varepsilon(P) \cap E \quad Q \neq P$$

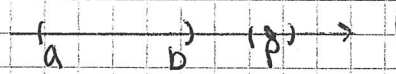
cioè se comunque scelto un intorno B_ε di P, $\exists$ almeno un punto $Q \neq P$ che appartiene all'intorno

caso $n = 1$

$E = (a, b)$

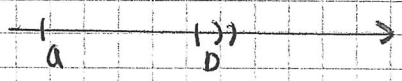


$B_\varepsilon(P) = (P - \varepsilon, P + \varepsilon)$ P è di accumulazione



P non è di acc.

$\exists$ punti $\neq P$ $\in E$ all'interno dell'intorno



b è di accumulaz?

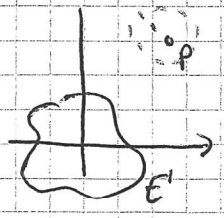
$b \notin E$ (intervallo aperto)

Se prendo qualunque intorno trovo punti $Q \in E$ anche per ε piccolissimo

b è di accumulaz

def Un punto $P \in \mathbb{R}^m$ si dice ISOLATO se non è di accumulazione e $P \in E$

cioè $\exists$ almeno un intorno $B(P, \varepsilon)$ t.c. da non contenere alcun punto di E oltre a P



$E = E' \cup \{P\}$

P è isolato

def Un punto $P \in \mathbb{R}^m$ si dice INTERNO ad E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; B_\varepsilon(P) \subset E$$

def Un punto $P \in \mathbb{R}^m$ si dice ESTERNO ad E se

P è interno a $E^c = \mathbb{R}^m \setminus E$

def Un punto $P \in \mathbb{R}^m$ è di frontiera per E se

non è né interno né esterno ad E

def

$\overset{\circ}{E}$ = PARTE INTERNA = $\{ P \in \mathbb{R} : x \text{ è punto interno ad } E \}$

∂E = FRONTIERA DI E = $\{ P \in \mathbb{R} : x \text{ è punto di frontiera per } E \}$

$\bar{E}$ = CHIUSURA DI E = $\partial E \cup E$

$x \in \partial E \iff$ in ogni intorno di x si trovano sia punti di E sia punti di E^c. Quindi ogni punto isolato è ∂E. Inoltre $\partial E = \partial E^c$.
Sono punti di accumulazione sia i punti interni sia i punti di frontiera non isolati; mentre i punti esterni non lo sono. Dunque:

$$\{ x : x \text{ è punto di acc per } E \} = \bar{E} \setminus \{ x : x \text{ è punto isolato di } E \}$$

Inoltre un punto di acc può non appartenere ad E e un punto di E può non essere di acc per E.

def $E \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice APERTO se

$E = \overset{\circ}{E}$ cioè ogni elemento di E è un punto interno ad E

$E \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice CHIUSO se

$E = \bar{E}$ dove $\bar{E} = E \cup \partial E$

o se E^c è APERTO

master copy
master copy
master copy COPISTERIA

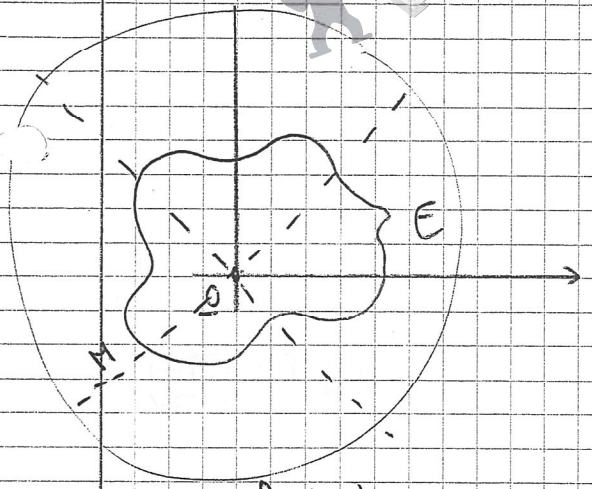
14/03

$E \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

def E è LIMITATO se

$\exists M > 0$ t.c. $d(P, \underline{0}) < M \quad \forall P \in E$

dove $\underline{0}$ è il pto di riferimento (l'origine)

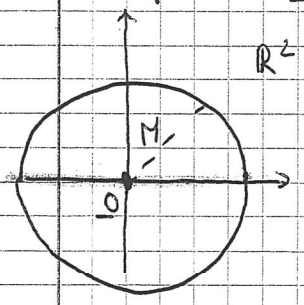


è limitato se riesco a trovare un intorno sferico dell'origine abbastanza grande di raggio M che contiene completamente l'insieme

$B_M(\underline{0})$ → intorno sferico di centro l'origine e raggio M

- esempio di insieme non limitato

$E = \{ y = 0 \} \subset \mathbb{R}^2$



NON LIMITATO non riesco a inserire completamente l'insieme in un intorno del dominio

preso un qualunque intorno sferico dell'origine di raggio M ci sono dei pti di E non inclusi → VERO $\forall$ M

Questo esempio ci potrebbe far pensare che le cose siano sempre legate agli assi → intuizione sbagliata ☹ posso allontanarmi dall'origine (per costruire un insieme non limitato) muovendomi in qualsiasi direzione, non necessariamente quelle degli assi