[redacted]ITO 11 GIUGNO 2015

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \log(1+\sqrt{x^2+2y^2})$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sapendo che $\log(t) \sim t$ per $t \to 0$ e ponendo $\sqrt{x^2+2y^2} = t$ possiamo scrivere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

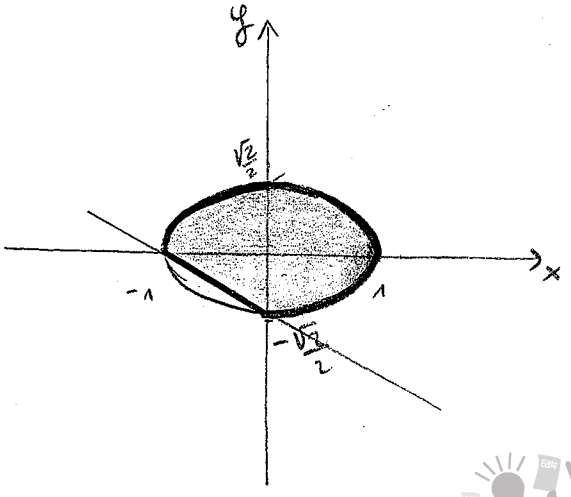
Studiamo le possibili direzioni di avvicinamento al punto costituite dalle rette nella forma $\{y=\lambda x\}$. Troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+2\lambda^2x^2}}{\sqrt{x^2+\lambda^2x^2}} = \frac{x\sqrt{1+2\lambda^2}}{x\sqrt{1+\lambda^2}}$$

IL VALORE DEL LIMITE DIPENDE DA $\lambda \Rightarrow$ NON ESISTE

ii) determinare max e min su

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \le 1,\ y + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \ge 0\}$$



Cerco i punti di non derivabilità

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

Quindi il punto $P=(0,0)$ è un punto da considerare

Cerco i punti critici liberi risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+2y^2})} = 0 \\ \frac{4y}{\sqrt{x^2+2y^2}} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+2y^2})} = 0 \end{cases}$$

Non ~~considero~~ ci sono soluz. nell'insieme da considerare

Quando gli spigoli della curva

$\delta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Dividiamo il bordo in due parti

$\Gamma_1 = \left\{ y + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \,,\ -1 \le x \le 0 \right\}$

$\Gamma_2 = \left\{ x^2 + 2y^2 = 1 \,,\ y + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \ge 0 \right\}$

Cerco i massimi e minimi vincolati

considero Γ_1. Parametrizzazione:

$\gamma(t) = (t, 0) \qquad t \in [-1, 0]$

Faccio la composizione $(f \circ \gamma)(t)$

$g_1(t) = \log(1 + |t|) \quad t \in [-1, 0] \Rightarrow \log(1 - t)$

$g_1'(t) = -\frac{1}{1-t}$

NO

$A = (-1, 0)$, $B = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

~~$v_{AB} = (B - A) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = (\frac{\sqrt{2}}{2})$~~

Parametrizzazione del segmento!!!!

$\gamma(t) = tP + (1-t)A = t\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{pmatrix}$

intervallo: $\begin{cases} t - 1 = x_a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}t = y_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - 1 = -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}t = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$

Faccio la composizione $(f \circ \gamma)(t)$

$g_1(t) = \log\left(1 + \sqrt{(t-1)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 \cdot 2}\right) = \log\left(1 + \sqrt{2t^2 - 2t + 1}\right) \qquad t \in [0, 1]$

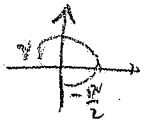
$g_1'(t) = \frac{4t - 2}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{2t^2 - 2t + 1}} \qquad t \in [0, 1]$

unico punto critico è $t_0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow Q = \gamma(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$

Considero Γ_2. Parametrizzazione:

$\gamma(t) = (\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t) \qquad t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$



Faccio la composizione

$g_2(t) = \log\left(1 + \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) = \log(2)$ funzione costante

↓

no punti critici

Valori da confrontare:

$f(P) = 0$

$f(S_1) = f(S_2) = \log(2)$

$f(Q) = \log\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$max = \log(2)$

$min = 0$

2) Data la curva (γ, I) con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t + \sin t, \frac{1}{2}\cos t - \sin t\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{1+2\sqrt{3}}{4}, \frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right)$

Trovo i t_0 per cui $\gamma(t) = P$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cos t_0 + \sin t_0 = \frac{1+2\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2}\cos t_0 - \sin t_0 = \frac{1-2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

SOMMO E SOTTRAGGO ~~MOLTIPLICO E DIVIDO~~

$$2\sin t_0 = \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \cos t_0 = \frac{1}{2} \\ \sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad t_0 = \frac{\pi}{3}$$

Trovo il vettore velocità

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin t_0 + \cos t_0 \\ -\frac{1}{2}\sin t_0 - \cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-2-\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \neq 0$$

Trovo il vettore normale

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è quindi:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1+2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{2-\sqrt{3}}{4}\left(y - \frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right) = 0$$

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\ \frac{x+y-2}{(x-1)^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

Dominio $F(x,y) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$

Rotore

$$\text{rot}(F)(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$= \frac{2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 - (x+y-2)(2x-2)}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} + \frac{(2x-1)^2+(y-1)^2 - (x+y-2)(2y-2)}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2xy + 2y - 2xy + 2x - 2y^2}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)^2+(y-1)^2 - (x+y-2)(2x-2) - [-((x-1)^2+(y-1)^2) - (x-y)(2y-2)]}{((x-1)^2+(y-1)^2)^2} =$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 2x^2 + 2x - 2xy + 2y + 4x - 4 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + 2xy - 2x - 2y + 2y$$

$= 0 \Rightarrow$ Il campo F è irrotazionale

Dominio non semplicemente connesso → dobbiamo calcolare il lavoro per una curva chiusa che vada intorno al punto (1,1)

Proprietà della curva (γ, I).

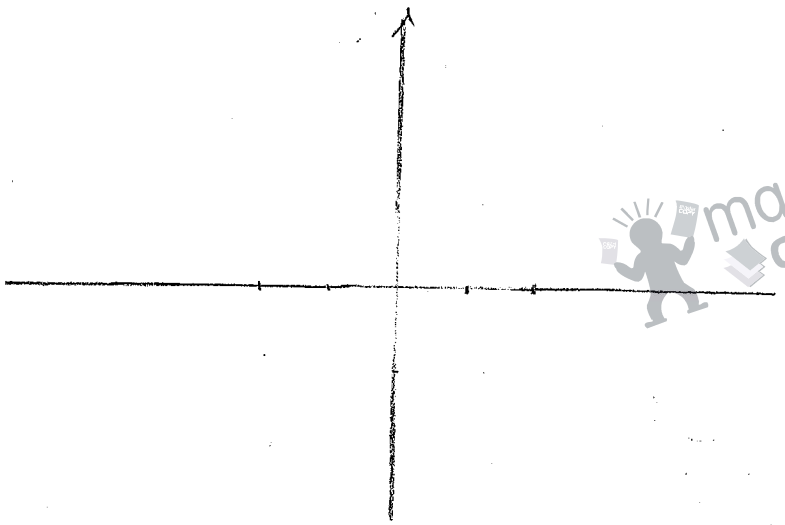
- $\gamma(0) = \gamma(2\pi) \Rightarrow$ CHIUSA $= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ci chiediamo se si può applicare il teorema del rotore

↳ dobbiamo verificare che l'insieme il racchiuso dalla curva sia tutto contenuto nel dominio del campo, ossia che $(1,1) \notin U$

↓

disegnamo il sostegno di (γ, I)



$t = 0 = 2\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$t = \frac{\pi}{2} = (1, -1)$

$t = \pi = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$t = \frac{3}{2}\pi = (-1, 1)$

↓

la parte interna non comprende $(+1, -1)$

master COPY

Possiamo quindi applicare il teorema del rotore per cui

$$L(F,\gamma) = \iint_U \text{rot}(F)(x,y)\,dx\,dy = \iint_U 0\,dx\,dy = 0$$

3) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2 = \sin^2\left(\frac{y}{2}\right),\ 0\le y\le \pi\right\}$$

i) scrivere l'eq. cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\pi,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

La superficie Σ è intesa come insieme di livello della f. diff.bile

$$F(x,y,z) = x^2+z^2-\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$$

Trovo il gradiente

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -\cos\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right) \\ 2z \end{pmatrix}$$

sostituisco P

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0$$

l'eq. cartesiana cercata è

$$1\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(y-\frac{2}{3}\pi\right) + \sqrt{2}\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\le \sin^2\left(\frac{y}{2}\right),\ 0\le y\le\pi,\ x+z\ge 0\right\}$$

Si tratta del solido di rotazione nella forma

$$\tilde{V} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le y\le b,\ x^2+z^2\le g^2(y)\right\}$$

dove $a=0$, $b=\pi$ e $g(y)=\sin\left(\frac{y}{2}\right)$ intersecato con il semispazio $\{x+z\ge 0\}$

figura??