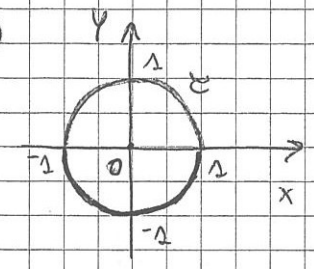
04/03/20

es



$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$$

$\downarrow$ sostituzione del piano

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ y = \sqrt{1-x^2}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ y = -\sqrt{1-x^2}\}$$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\} = \text{graf}\, g_+ \cup \text{graf}\, g_-$

$g_+ : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad g_+(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad \text{graf}\, g_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ y = g_+(x)\}$

$g_- : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad g_-(x) = -\sqrt{1-x^2}$ $\quad \text{graf}\, g_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ y = g_-(x)\}$

es



$P = p_0$

$P = p_1$

$P(x,y)$ pressione in (x,y)

$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y) = p_0\}$

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y) = p_1\}$

es

applicazioni lineari dell'algebra lineare

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

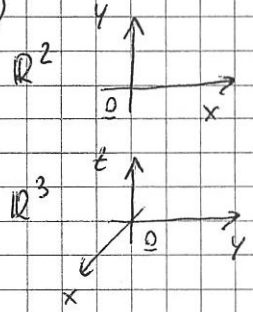
SPAZI $\mathbb{R}^n$:

spazio fisico: tipo di spazio su cui possiamo definire le funzioni (non ha la struttura di spazio vettoriale)

$\downarrow$

$P \in \mathbb{R}^4$, sistema di coordinate e origine O, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ $p_i \in \mathbb{R}$

(es)



master COPY COPISTERIA

def: si dice DISTANZA su $\mathbb{R}^n$ una funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c.

(i) POSITIVITÀ: $\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$ si ha $d(P, Q) \geq 0$ e
$d(P, Q) = 0 \iff P = Q$

(ii) SIMMETRIA: $\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$ si ha $d(P, Q) = d(Q, P)$

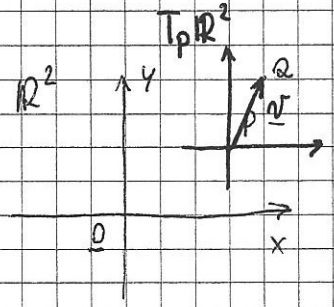
(iii) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ si ha $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$

(es) $d(P, Q) \begin{cases} = 1 & \text{se } P \neq Q \\ = 0 & \text{se } P = Q \end{cases}$

$P \neq Q$, $R \neq Q$, $1 \leq 2$ ✓ ; $P \neq Q$, $R = P$, $1 < 1$ ✓ ; $P \neq Q$, $R = Q$, $1 < 1$ ✓

(es) distanza euclidea $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2}$$



identifichiamo con $T_P\mathbb{R}^n$ (spazio tangente a $\mathbb{R}^n$ in P) l'insieme dei vettori $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ applicati in P

$T_P\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale isomorfo a $\mathbb{R}^n$

def: dato $T_P\mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale, si definisce NORMA

$\|\cdot\| : T_P\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. (i) $\forall \underline{v} \in T_P\mathbb{R}^n$ si ha $\|\underline{v}\| \geq 0$ e
$\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\forall \underline{v} \in T_P\mathbb{R}^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha
$\|t\underline{v}\| = |t| \cdot \|\underline{v}\|$

(iii) $\forall \underline{v}, \underline{w} \in T_P\mathbb{R}^n$ si ha $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$

(es) norma euclidea

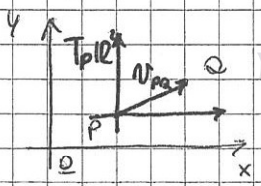
una norma introduce una distanza una spazio è detto spazio normato

dato $\underline{v} \in T_p\mathbb{R}^n$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\|\underline{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots v_n^2}$

$P, Q \in \mathbb{R}^n$ e se $T_p\mathbb{R}^n$ è dotato di norma, $\underline{d(P,Q) = \|v_{PQ}\|}$,

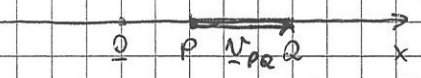
$v_{PQ} \in T_p\mathbb{R}^n$



$P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$

$\underline{v}_{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$

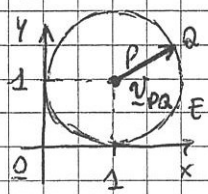
(es) $(\mathbb{R}, d)$



$P(x)$, $Q(x')$ $\quad \underline{d(P,Q)} = \sqrt{(x-x')^2} = |x - x'|$

$\underline{v} \in T_p\mathbb{R}$ $\quad \underline{v_{PQ}} = (x' - x)$, $\|\underline{v}_{PQ}\| = \sqrt{(x'-x)^2} = |x' - x|$

(es) $\mathbb{R}^2$, $P = (1,1)$ $\quad E = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{v}_{PQ}\| = 1\}$ → il cerchio



$Q = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\underline{v}_{PQ} \in T_p\mathbb{R}^2$, $\underline{v}_{PQ} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$\|\underline{v}_{PQ}\| = 1 \iff \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 1$

$\iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$\iff d(P,Q) = 1$

$(\mathbb{R}^n, d)$

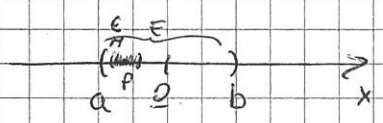
<u>def</u>: dati $P \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ si chiama INTORNO SFERICO DI P DI RAGGIO ε l'insieme $B_\varepsilon(P)$ dato da $B_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : d(P,Q) < \varepsilon\}$

(es) $\underline{n=1}$ $\quad B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

def: dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice che $P \in \mathbb{R}^n$ è di ACCUMULAZIONE PER E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, Q \in E \cap B_\varepsilon(P) \setminus \{P\}$$

(es) $E = (a,b) \subset \mathbb{R}$ $\quad Acc(E) = [a,b]$ ↘

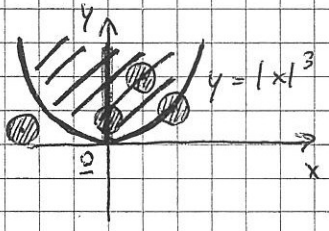


qualunque punto di a, b prenda, estremi compresi, posso costruire un intorno che contiene punti di E

↓

nell'intervallo di raggio ε attorno a P ci sono altri punti che appartengono a E?
E = intervallo aperto a, b

(es) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|^3, \ x \neq 0\}$



— = incluso
— = escluso

in questo caso ($\mathbb{R}^2$) l'intorno sarà sfera

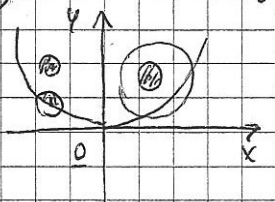
$$Acc(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|^3\}$$

def: dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice che $P \subset E$ è ISOLATO se $\exists\, B_\varepsilon(P)$ t.c. $B_\varepsilon(P) \cap E = \{P\}$

def: dato $E \in \mathbb{R}^n$ si dice che $P \subset E$ è INTERNO ad E se

$\exists\, B_\varepsilon(P)$ t.c. $B_\varepsilon(P) \subset E$. Parte interna di $E = \mathring{E} = \{\text{punti interni di } E\}$

(es) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|^3, \ x \neq 0\}$



$$\mathring{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in E \text{ t.c. } y \neq |x|^3\}$$

↓

quindi bisogna togliere il bordo

↓

bisogna che ci sia almeno un intorno completamente appartenente ad E

def: dato $E \subset \mathbb{R}^n$, si dice che $P \in \mathbb{R}^n$ è ESTERNO ad E se P è interno a $\mathbb{R}^n \setminus E$ ($\Leftrightarrow \exists\, B_\varepsilon(P)$ t.c. $B_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$)

↓

NON sono i punti che non sono interni, ma quelli i cui intorni non hanno intersezione contenuta in E → punti interni al complementare

def: si dice che $P \in \mathbb{R}^n$ è DI FRONTIERA per E se P non è interno ad E e non è esterno ad E

Frontiera di E = ∂E = {punti di frontiera}
(Bordo)

↓

nell'es di prima scrivevo il bordo rosso e il semiasse blu:

$\partial E = \{y = |x|^3\} \cup \{y > 0,\ x = 0\}$

def: $E \subset \mathbb{R}^n$, chiuso di $E = \bar{E} = E \cup \partial E$

$E \subset \mathbb{R}^n$ si dice CHIUSO se $E = \bar{E} = \mathring{E} \cup \partial E$

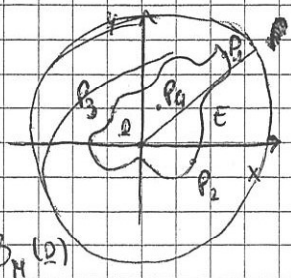
" " APERTO se $E = \mathring{E}$

$\sqrt{(x-0)^2} = d(x,0)$

def: $E \in \mathbb{R}$ è LIMITATO se $\exists\, M > 0$ t.c. $|x| \le M\ \forall x \in E$

def: $E \in \mathbb{R}^n$ è LIMITATO se $\exists\, M > 0$ t.c. $d(P,O) < M\ \forall P \in E$
($\Leftrightarrow E \subset B_M(O)$)

es



l'insieme E è limitato perché è contenuto nell'intorno con raggio centrato nell'origine