ANALISI II

PICCOLO TESTO RIASSUNTIVO
DELLE DOMANDE FREQUENTI
POSTE ALL'ESAME ORALE
E DEI PRINCIPALI:

- ARGOMENTI
- TEOREMI
- FORMULE
- QUESITI

TRATTATI NEL
CORSO DEL CORSO DI ANALISI II

MASTER COPY
Tel. 050 831126
Cell. 388 9837745

! • AD OGNI DOMANDA POSTA VI È UNA RISPOSTA ASSOCIATA.

• AD ALCUNE RISPOSTE SI RIMANDA AI RIFERIMENTI DELLE DISPENSE FORNITE DAL PROFESSORE O CHE LA RISPOSTA SI TROVA FACILMENTE (e ben comprensibile) SU INTERNET.

• BUONO STUDIO e BUON ESAME !


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

RIEPILOGO

DEFINIZIONI GENERALI

PUNTI DI ACCUMULAZIONE E TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS

Consideriamo un punto x_0
si definisce intorno, un intervallo aperto limitato (a, b) che contenga x_0 : $a < x_0 < b$

- consideriamo un insieme E, (un' insieme di punti).
  e un punto x_0; diremo che il punto x_0, dato un insieme E, è definito PUNTO DI ACCUMULAZIONE (LIMITE) se in ogni intorno di x_0 $\exists$ almeno un punto dell' insieme E che sia distinto da x_0
  - se $x_0 \notin E$ → PUNTO ISOLATO DI E
    in questo caso esisterà un' intorno di x_0 non contenente punti di E che sono distinti da x_0

Quindi, ricapitolando un punto x_0, di ACCUMULAZIONE può appartenere $(\in)$ all' insieme E, come non può appartenere $(\notin)$ all' insieme E.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEO.

Se x_0 è un punto di accumulazione dell' insieme E, in ogni intorno di x_0, esistono infiniti punti di E

DIM.

Supponiamo che esistano finiti punti in un intorno di x_0 : (normalmente sono INFINITI)

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n \in E$
DISTINTI DA x_0

- $\rho > 0$ → la più piccola tra le distanze

$|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \ldots\ldots, |x_n - x_0|$

in ogni intorno di questo tipo : $\left(x_0 - \frac{\rho}{2} \quad x_0 + \frac{\rho}{2}\right)$
Bene, in quest' intorno non cadrebbero più punti di E,

distinti da x_0, e questo va a cozzare con il fatto che in un intorno di x_0 ci deve essere almeno un punto di E DISTINTO da x_0.

In questo caso quindi (esempio) diremo che in ogni intorno di x_0 non ci saranno un numero finito n di punti di E ma un numero infinito; infiniti punti di E, come appunto afferma il teorema

- Affinché un insieme, ad esempio E, abbia/sia dotato di punti di accumulazione, è necessario che ne contenga infiniti.
  - PERÓ può accadere che un insieme abbia INFINITI punti e non abbia punti di accumulazione.

TEO. BOLZANO - WEIERSTRASS

Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ limitato, contenente infiniti punti,

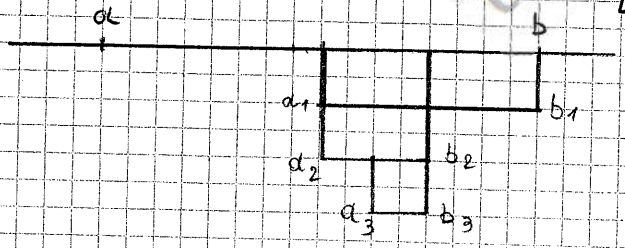
($\subset$: CONTENUTO INCLUSO; $\mathbb{R}$: NELL'INSIEME DEI NUMERI REALI LIMITATO)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ammette almeno un punto di accumulazione.

- se è E un insieme contenuto nel campo dei numeri reali, allora esisterà un intervallo chiuso $[a, b]$ che sicuramente lo contiene. (LIMITATO)

RAPPRESENTIAMOLO



Se procediamo quindi con questo discorso, otteniamo infiniti intervalli:

$[a, b]$ $[a_1, b_1]$ $[a_2, b_2]$ ..... $[a_n, b_n]$

indichiamo con a_1 b_1 uno dei due intervalli che contiene infiniti punti di E

la lunghezza $b_1 - a_1$ sarà:

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} \Rightarrow \text{QUINDI} = b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$$

quindi l'ultimo intervallo, quello generico $\frac{b_n - a_n}{2^n}$, contiene infiniti punti di E

• avremo:

$$a < a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$$

consideriamo questi 2 insiemi:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$$

risulterà che il $\sup A \leq \inf B$

proviamo: $\sup A = \inf B$ ovvero che A e B sono classi contigue.

$$0 \leq \inf B - \sup A \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

comunque si fissi:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad n > \log_2 \left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]$$

risulterà che

$$0 \leq \text{INF } B - \text{SUP } A < \varepsilon$$

... essendo un ε (EPSILON) arbitrario le classi A e B sono contigue

• a questo punto poniamo ξ (un numero x_i) lo poniamo pari all'estremo inferiore dell'insieme B:

$\xi = \inf B = \sup A$ A e B classi CONTIGUE!

andiamo a provare che questo ξ (x_i) è proprio punto di accumulaz. dell'insieme E

• SIA ξ elemento di SEPARAZIONI delle classi CONTIGUE

Comunque si fissi un $\rho > 0$ (reale)

INTORNO $(\xi - \rho, \xi + \rho)$

→ intorno del punto ξ (x_i)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745