07/03/18

Analisi II

Funzioni in più variabili = applicazioni lineari

$L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

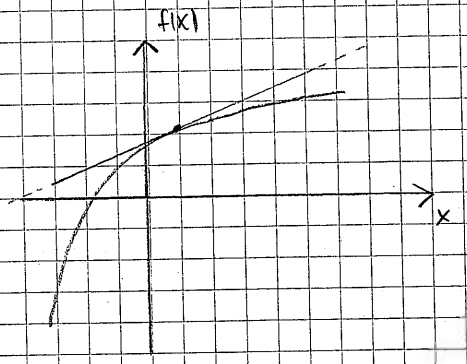


GRAFICO della FUNZIONE:

Prodotto cartesiano del dominio e del codominio della funzione

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- funzione continua
- funzione derivabile

Retta tangente al grafico: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (m)

Punti della retta tangente: $\{(x, f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

dove $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x)$

NON è lineare perché l'immagine di 0 non fa 0, che invece è una proprietà delle app. lineari.
È un'applicazione lineare + costante. = APPLICAZIONE AFFINE

Le applicazioni lineari approssimano la funzione in quell'intorno.
↳ Taylor

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + o(x - x_0)$$

Taylor → approssima la funzione in quel punto

$\mathbb{R}^n$ spazio "fisico" con un punto fisso 0 (= origine)

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ se $n = 2$ $P = (x, y)$; $n = 3$ $P = (x, y, z)$

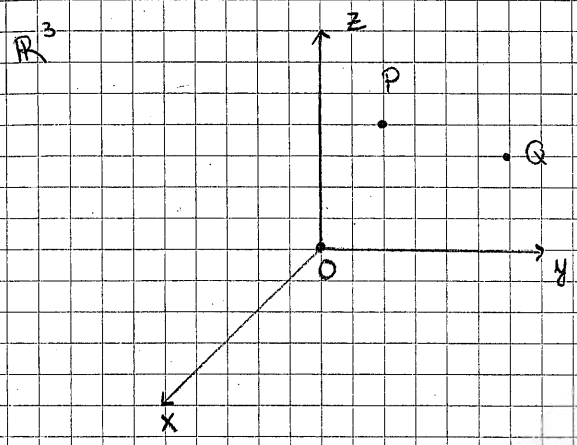
Distanza $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che

i) $d(P, Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$, e $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$

iii) $d(P, Q) = d(Q, P) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$

iii) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $\forall\ P, Q, R \in \mathbb{R}^n$

$$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$$



MASTER COPY
Tel. 050 83.12.26
Cell. 388 9837145

ES = Distanza Euclidea $\rightarrow d_2(P,Q)$

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + \dots + (p_n-q_n)^2}$$

ES ② = Ho $P = (p_1, \dots, p_n)$ $Q = (q_1, \dots, q_n)$

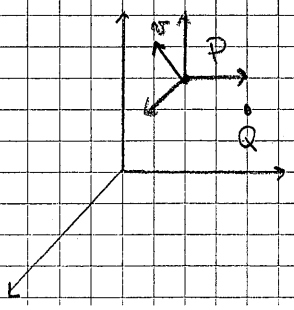
$$d_1(P,Q) = |p_1-q_1| + |p_2-q_2| + \dots + |p_n-q_n|$$

$$d_\infty(P,Q) = \max_{i=1,\dots,n} |p_i - q_i|$$

Preso $P \in \mathbb{R}^n$, consideriamo $\boxed{T_P \mathbb{R}^n}$ = SPAZIO TANGENTE A $\mathbb{R}^n$ in P

↳ spazio vettoriale di vettori $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ applicati in P.

in $\mathbb{R}^3$ ho:



$$T_P \mathbb{R}^3 \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Oltre al punto devo sempre immaginare che ci sono vettori applicati in quel punto che mi permettevano di definire direzioni particolari e rette passanti per quel punto.

NORMA → $\|\cdot\| : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

PROPRIETA' =

i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall\, v \in T_p\mathbb{R}^n, \quad \|v\| = 0 \iff v = \underline{0}$

ii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \; v \in T_p\mathbb{R}^n$

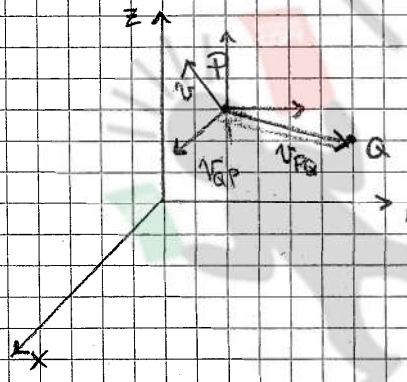
iii) $\forall\, v, w \in T_p\mathbb{R}^n \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 393 9057145

ES = Norma Euclidea = CASO PARTICOLARE

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \|v_e\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Posso costruire un vettore v_{PQ}, che ha origine in P e va in Q



$v_{PQ} \in T_p\mathbb{R}^n$

$P = (p_1, \ldots, p_n)$
$Q = (q_1, \ldots, q_n)$

$$v_{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} \qquad \|v_{PQ}\| = d(P, Q)$$

Esiste anche un vettore v_{QP}, che ha origine in Q e va in P. Ma è completamente diverso da v_{PQ} perché stanno in spazi vettoriali diversi.

$$\|v_{PQ}\| = \|v_{QP}\|$$

Insieme degli elementi detti punti, nei quali è definita una distanza

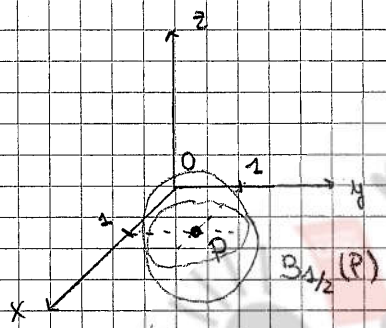
Spazio fisico $\mathbb{R}^n$ dotato di una distanza: $(\mathbb{R}^n, d)$ || SPAZIO METRICO

Def = $P \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, si dice INTORNO SFERICO di P di RAGGIO ε, $B_\varepsilon(P) := \{ Q \in \mathbb{R}^n : d(P,Q) < \varepsilon \}$

ES ① = $P = (1,1,0)$ $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$B_{\frac{1}{2}}(P) = \{ Q = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : d(P,Q) < \frac{1}{2} \}$

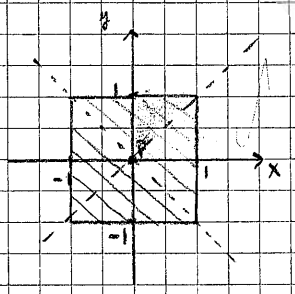
Punti dello spazio che verificano la disequazione → $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} < \frac{1}{2}$



MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

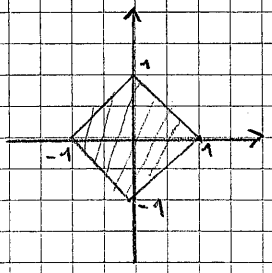
ES ② = $\mathbb{R}^2$ $P = (0;0)$ $B_1(P) = \{ Q \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(P,Q) < 1 \}$

$Q = (x,y)$ $d_\infty(P,Q) = \max \{ |x-0|, |y-0| < 1 \}$



Sotto la bisettrice $x > y$ (I quad)

Oppure se uso $d_1(P,Q) = |x| + |y| < 1$



1° quadrante → $x + y < 1 \rightarrow y < 1 - x$

Def = $P \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ si dice SFERA DI CENTRO P e RAGGIO ε

$$S_\varepsilon(P) := \{ Q \in \mathbb{R}^n : d(P,Q) = \varepsilon \}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

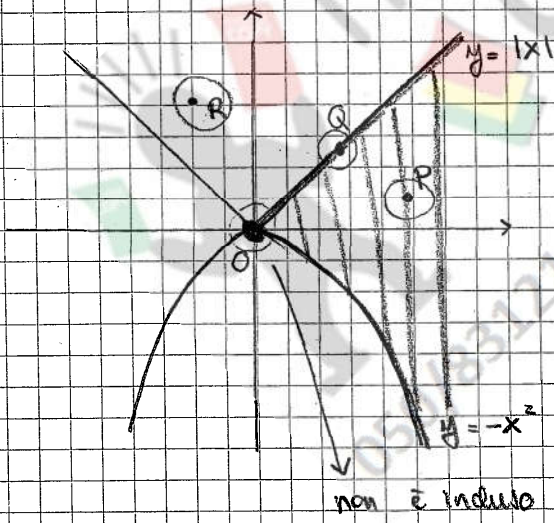
Ho una funzione $E \subseteq \mathbb{R}^n$

Def = un punto $P \in \mathbb{R}^n$ si dice di ACCUMULAZIONE per E se $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ Q \neq P\ /\ Q \in E \cap B_\varepsilon(P)$

"vicino a P posso trovare un punto arbitrariamente vicino $\neq P$"

Def = un punto $P \in E$ si dice ISOLATO se $\exists$ un $\varepsilon > 0$ / $B_\varepsilon(P) \cap E = \{P\}$ (contiene solo P)

Es $\Rightarrow E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ -x^2 \leq y \leq |x| \}$



Ma $x > 0$, prendo la parte blu - l'origine che NON prendo. $(0,0) \notin E$

Faccio una ccf intorno a P per verificare di avere punti $\neq P$ in quell'intorno → è un punto di accumulazione. ∀ qualunque sia il raggio!!
Stessa cosa vale per Q che è sul grafico.
Anche l'origine è di accumulazione anche se non appartiene

Acc $(E) = \{$ punti di acc. per $E \}$

Se prendo R non è un punto di acc perché non ci sono punti dell'insieme vicino, ma non è nemmeno isolato perché dovrebbe appartenere all'insieme.