master COPY

Applicazione lineare

Uno strumento per costruire un'approssimazione di una funzione (per andare da uno spazio ad uno diverso)

$\mathbb{R}^n$: spazio fisico dotato di un sist. di riferimento che serve per descrivere un insieme di punti in cui non si considera la componente vettoriale

Distanza

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c.:

i) $\forall P,Q \in \mathbb{R}^n$, $d(P,Q) \geq 0$ e se $d(P,Q)=0 \Rightarrow P=Q$

ii) $\forall P,Q \in \mathbb{R}^n$, $d(P,Q) = d(Q,P)$

iii) $\forall P,Q,R \in \mathbb{R}^n$, $d(P,R) \leq d(Q,R) + d(Q,P)$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

INTORNO SFERICO

Dato $P \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, si dice intorno sferico di P e raggio ε, l'insieme $B_\varepsilon(P) := \{Q \in \mathbb{R}^n : d(P,Q) < \varepsilon\}$

SFERA

Dato $P \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, si dice sfera di centro P e raggio ε, $S_\varepsilon(P) := \{Q \in \mathbb{R}^n : d(P,Q) = \varepsilon\}$

Punto di ACCUMULAZIONE

$X \subset \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$ è p. di Acc di X se $\forall \varepsilon > 0$. $\exists$ $Q \in (X \cap B_\varepsilon(P)) - \{P\}$.

PUNTO ISOLATO

$X \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^n$ è ISOLATO se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \cap X = \{P\}$

Tipi di punti

Dato $X \subset \mathbb{R}^n$

- interno se $P \in X$, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \subset X$
- esterno se $P \in \mathbb{R}^n$, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \cap X \neq 0$.
- di frontiera se $P \in \mathbb{R}^n$, non è né interno né esterno

PARTE INTERNA, FRONTIERA, CHIUSURA

Dato $X \in \mathbb{R}^n$

parte interna $\mathring{X} = \{\text{punti interni di } X\}$

frontiera $\partial X = \{\text{punti di frontiera di } X\}$

chiusura $\overline{X} = X \cup \partial X$

INSIEME APERTO E CHIUSO

$X \in \mathbb{R}^n$ si dice Aperto se $X = \mathring{X}$ (non prendo contorno)

chiuso se $X = \overline{X}$

INSIEME LIMITATO R

$X \subset \mathbb{R}$ si dice limitato se $\exists M > 0$ t.c. $|x| < M \quad \forall x \in M$

INSIEME LIMITATO $\mathbb{R}^n$

$X \subset \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists M > 0$ t.c. $X \subset B_M(0)$

INSIEME COMPATTO

$X \subset \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è chiuso e limitato

INTORNO DI ∞

È un insieme della forma $\mathbb{R}^n - \overline{\{B_\varepsilon(0)\}}$

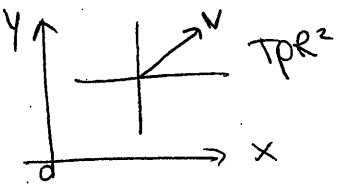
(Il complementare degli intorni di 0).

∞ è P. di Acc di $X \in \mathbb{R}^n \iff X$ non è limitato

SPAZIO TANGENTE

$T_P\mathbb{R}^n$ è lo spazio tangente a $\mathbb{R}^n$ in P.

È lo spazio vettoriale dei vettori applicati in P, isomorfo a $\mathbb{R}^n$.



su T_pR^n si introduce concetto di NORMA

$V \in T_pR^n$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ si dice norma $(\|\cdot\|)$

i) $\|V\| \geq 0 \quad \forall V$ e $\|V\| = 0 \Leftrightarrow V = 0$

ii) $\|\lambda V\| = |\lambda| \cdot \|V\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

iii) se $V, W \in T_pR^n$, $\|V+W\| \leq \|V\| + \|W\|$

Norma euclidea $= \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

NORMA - DISTANZA

$d(P,Q) = \|V_{PQ}\| = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + \dots + (q_n-p_n)^2}$

$V_{PQ} = -V_{QP}$

Prodotto scalare euclideo

$V, W \in T_pR^n \quad \langle V, W \rangle := v_1w_1 + \dots + v_nw_n$

NORMA - PROD SCALARE

$\|V\| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$

per disegno ↑

FUNZIONI

$f: R^n \to R^m$ associano funzioni in R^n a R^m $(n+m \leq 3)$

→ $m = 1$ valori reali

→ $m > 1$ valori vettoriali

X = DOMINIO NATURALE (insieme più grande sul quale ha senso definire la f) (insieme di R^n)

CODOMINIO $= R^m$

IMMAGINE $\Rightarrow \text{Imm } f \subset R^m$

$\text{Imm } f := \{Q \in R^m : \exists P \in X \text{ t.c. } f(P) = Q\}$

GRAFICO $:= \{(P,Q) \in R^n \times R^m : P \in X, f(P) = Q\}$

FUNZIONE LIMITATA

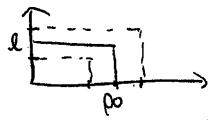
$f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è limitata se $\text{Imm } f$ è limitata

LIMITI

$F: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $P_0 \in Acc(X)$

$\lim_{P \to P_0} F(P) = l$

- P_0 finito, l finito

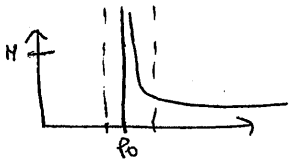


R $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall P \in (P_0 - \delta, P_0 + \delta) \cap (X - \{P_0\})$ vale $F(P) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

$\mathbb{R}^n$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c $\forall P \in B_\delta(P_0) \cap X - \{P_0\}$ vale $F(P) \in B_\varepsilon(l)$

- P_0 finito, l infinito

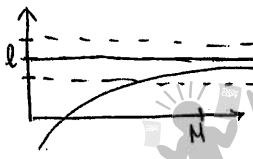
$\lim_{P \to P_0} F(P) = \infty$



$\mathbb{R}^n$ $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c $\forall P \in B_\delta(P_0) \cap X - \{P_0\}$ vale $F(P) \in \mathbb{R}^m - \overline{B_M(0)}$ $\quad (d(F(P), 0) > M)$

- P_0 infinito, l finito

$\mathbb{R}^n$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$ t.c. $\forall P \in (\mathbb{R}^n - \overline{B_M(0)}) \cap X$ vale $F(P) \in B_\varepsilon(l)$



CONTINUITÀ

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, è CONTINUA in $P_0 \in X$ se

① $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ se $P_0 \in Acc(X)$

② SEMPRE se P_0 è ISOLATO

PROPRIETÀ

- Somma, prodotto di f continue sono f continue
- I polinomi sono f continue

Da valori vettoriali a reali

$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad F(P) = (f_1(P), \dots, f_n(P))$

- $P_0 \in X, l \in \mathbb{R}^m \quad \lim_{P \to P_0} F(P) = l \iff \lim_{P \to P_0} f_i(P_i) = l_i$
- $P_0 \in X, l \in \mathbb{R}^m \quad \lim_{P \to P_0} F(P) = \infty \iff \lim_{P \to P_0} \sqrt{f_1(P)^2 + \dots f_n(P)^2} = +\infty$

  quando la distanza da $F(P)$ e 0 tende $+\infty$
- $P_0 = \infty \in \mathbb{R}^n, l \in \mathbb{R}^m \quad \lim_{P \to \infty} f(P) \sim \lim_{\sqrt{p_1^2 + \dots p_m^2} \to \infty} f(P)$

ESISTENZA DEL LIMITE

In $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$, devo controllare destra e sinistra, in $\mathbb{R}^n$ devo controllare tutte le ∞ direzioni. Per esistere deve essere uguale $\forall$ direz.

Teorema PONTE

$f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, P_0 \in Acc(X)$

$\lim_{P \to P_0} f(P)$ esiste ed è $= l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \iff \forall A \subset X$ t.c. $P_0 \in Acc(A)$ si ha $\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in A}} f(P) = l$

Il teorema dice che posso calcolare il limite solo usando ogni direz. quindi se una è $\neq \exists$.