ANALISI II

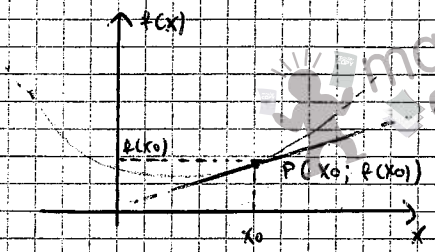
INTRODUZIONE

$\mathbb{R} \ni t \mapsto (x(t); y(t); z(t)) \in \mathbb{R}^3$ La posizione di un punto materiale è descritta da 3 coordinate (la funzione ha una variabile reale, ma assume valori in $\mathbb{R}^3$)

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \ni (\vartheta; \varphi) \mapsto T(\vartheta; \varphi) \in \mathbb{R}$ la funzione descrive la temperatura di ogni punto sulla Terra

$(\vartheta; \varphi)$ ↓ INPUT: 2 ANGOLI (LATITUDINE E LONGITUDINE)

STUDIO DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI



master copy

Una funzione derivabile può essere approssimata da un'applicazione lineare nell'intorno di un punto x_0

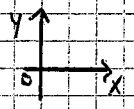
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\dots)$

$\mathbb{R}^n \; (= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}})$

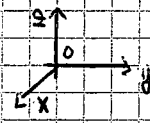
$\mathbb{R}^n$ è uno SPAZIO FISICO (struttura non vettoriale)

ESEMPI SPAZIO FISICO CON SISTEMA DI RIFERIMENTO

$\mathbb{R}^2$ PIANO CARTESIANO



$\mathbb{R}^3$ SPAZIO CARTESIANO



N.B. A noi interessano i punti del piano cartesiano / spazio cartesiano come vettori

$P \in \mathbb{R}^n \qquad P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$

P punto di $\mathbb{R}^n$

$P \in \mathbb{R}^2 \qquad P = (x; y)$

$P \in \mathbb{R}^3 \qquad P = (x; y; z)$

DEF. DISTANZA

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

(i) $\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$, $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

(ii) $\forall P, Q \in \mathbb{R}^n$, $d(P,Q) = d(Q,P)$

(iii) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ si ha $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$

ESEMPIO. DISTANZA EUCLIDEA

$P = (P_1; \dots, P_n)$

$Q = (Q_1, \dots, Q_n)$

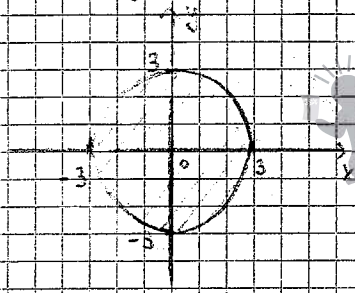
$d(P,Q) = \sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2 + \dots + (P_n - Q_n)^2}$

ESEMPI

① $O = (0;0) \in \mathbb{R}^2$

Disegnamo nel piano $X = \{ P \in \mathbb{R}^2 : d(P,O) < 3 \} = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < 3 \}$

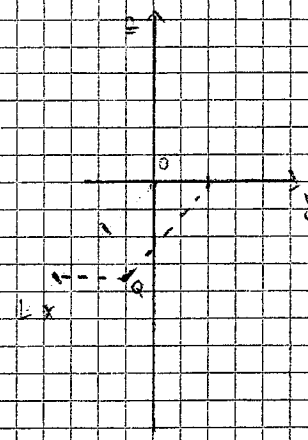
$x^2 + y^2 < 9$



② $Q = (2;1;0) \in \mathbb{R}^3$

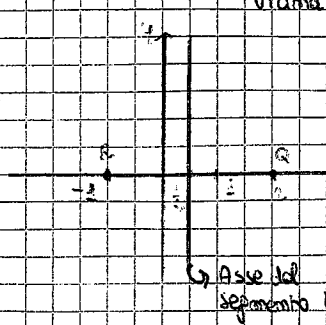
Disegnamo nello spazio $X = \{ P \in \mathbb{R}^3 : d(P,Q) > 2 \} = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} > 2 \}$

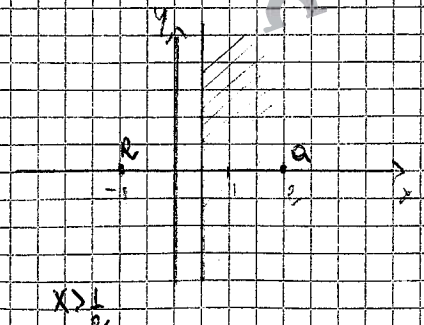
$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 > 4$



③ $Q = (2;0) \quad R = (-1;0)$

$X = \{ P \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{d(P,Q) < d(P,R)}_{\text{significa che } P \text{ è più vicino a } Q \text{ che a } R} \} = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} < \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} \}$





DEF. Dato $P \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, si dice INTORNO (SFERICO) DI P DI RAGGIO ε, è l'insieme $B_\varepsilon(P) := \{ Q \in \mathbb{R}^n : d(P;Q) < \varepsilon \}$

(Nel caso della distanza euclidea, l'intorno è sferico)

DEF. Dato $P \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, si dice SFERA DI CENTRO P E RAGGIO ε, è l'insieme $S_\varepsilon(P) := \{ Q \in \mathbb{R}^n : d(P;Q) = \varepsilon \}$

DEF. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, si dice che $P \in \mathbb{R}^n$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI X SE $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Q \in X \cap B_\varepsilon(P) \setminus \{P\}$

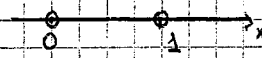
(Fissato un ε piccolo o grande a piacere, esiste un punto dell'insieme X diverso da P che si trovi a distanza minore di ε da P)

N.B. $P \in \mathbb{R}^n$ non è richiesta l'appartenenza all'insieme X

ESEMPI

① $X = (0;1) \subset \mathbb{R}$

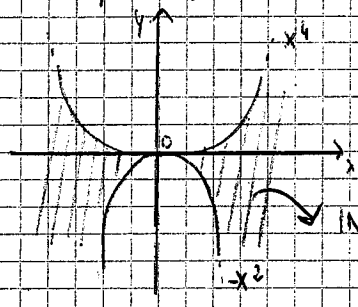
0 è un punto di accumulazione di X



Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists x \in (0;1) \cap B_\varepsilon(0)$, $x \neq 0$

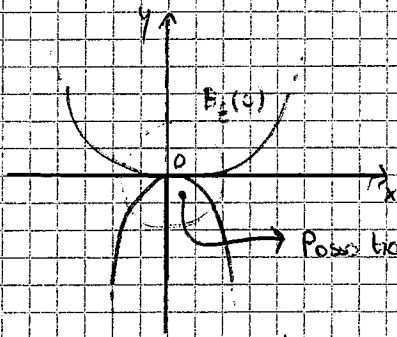
$\exists x \in (0;1)$, $|x| < \varepsilon$, $x \neq 0$

② $X = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 < y < x^4 \}$



0 è un punto di accumulazione di X

$0 \in X$? NO



DEF. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, un punto $P \in X$ si dice ISOLATO se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \cap X = \{P\}$

DEF. Dato $X \subset \mathbb{R}^n$, un punto

- $P \in X$ si dice INTERNO se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \subset X$
- $P \notin X$ si dice ESTERNO se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(P) \cap X = \emptyset$
- $P \in \mathbb{R}^n$ si dice DI FRONTIERA se non è né interno né esterno

ESERCIZIO $X = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 < y < x^4 \}$

Identificare i punti interni, esterni e di frontiera

$(\mathbb{R}^n, d)$

Dato $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice PARTE INTERNA di X l'insieme $\mathring{X} := \{$ punti interni a $X \}$

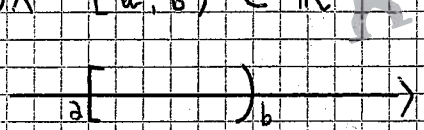
In particolare, $\mathring{X} \subseteq X$

Dato $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice FRONTIERA (o BORDO) di X l'insieme $\partial X := \{$ punti di frontiera di $X \}$

Dato $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice CHIUSURA di X l'insieme $\bar{X} := X \cup \partial X$

ESEMPI

① $X = [a;b) \subset \mathbb{R}$



master copy

il punto a appartiene all'insieme, ma non è un punto interno

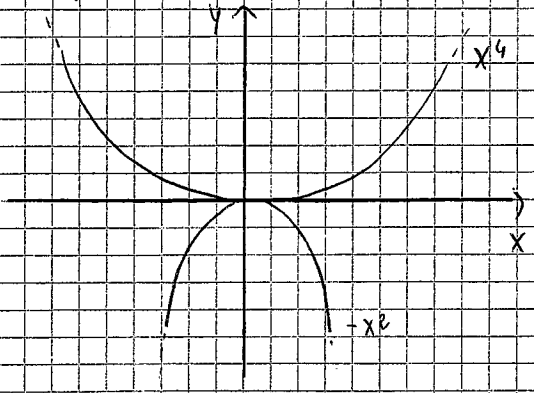
$\mathring{X} = (a;b)$

Qualunque intervallo di centro a interseca l'insieme $\Rightarrow$ gli unici punti di frontiera sono a e b

$\partial X = \{a;b\}$

$\bar{X} = [a;b]$

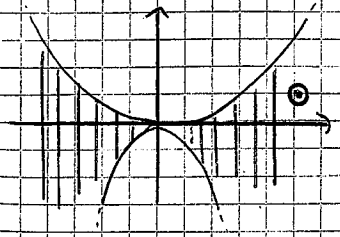
② $X = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 < y < x^4 \}$



I punti delle due curve non appartengono all'insieme

master copy

PUNTO INTERNO $\Leftrightarrow \exists$ UN INTORNO SFERICO TUTTO CONTENUTO NELL'INSIEME $\forall$ PUNTO DELL'INSIEME



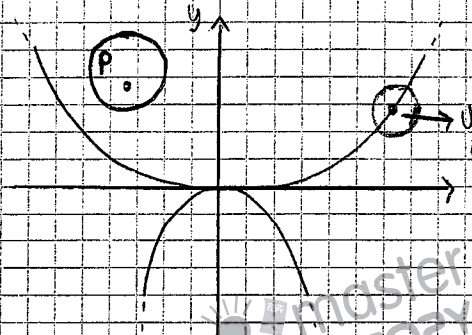
$X = \mathring{X}$

Considero un punto P

Posso trovare un intorno di P che non interseca l'insieme

I punti sulla curva sono esterni ? (Preso un punto sulla curva, riesco a trovare un intorno sferico che non interseca l'insieme ?)

NO



Una parte dell'intorno appartiene sempre all'insieme anche se l'intorno è piccolo

$\partial X = \{ y = x^4 \} \cup \{ y = -x^2 \}$

$\bar{X} = \{ -x^2 \leq y \leq x^4 \}$

(3) $X \subset \mathbb{R}^2$

$X = B_1(0) \cup \{(2;0)\}$

$\overset{\circ}{X} = ?$ $\quad \partial X = ?$ $\quad \bar{X} = ?$

DEF. $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice APERTO se $X = \overset{\circ}{X}$ e si dice CHIUSO se $X = \bar{X}$

($\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus X$ è aperto)

In $\mathbb{R}^n$ non è possibile introdurre un concetto di ORDINAMENTO.

Es: Presi due punti di $\mathbb{R}^2$, posso dire che uno è più grande dell'altro?

ORDINAMENTO LESSICOGRAFICO → Es: Parole di lunghezza 4

$\mathcal{L}^4 = \{$ BARI, CASA, CANE, $\}$

Specchio un punto con coordinate che sono le lettere

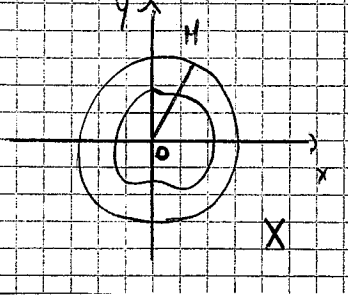
Posso estendere l'ordinamento di A (ordine alfabetico) ad $\mathcal{L}^4$

DEF. $X \subset \mathbb{R}$ è LIMITATO

se $\exists M > 0$ t.c $|X| < M \quad \forall x \in X$

DEF. $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice LIMITATO

se $\exists M > 0$ t.c. $X \subset B_M(0)$



$B_M(0)$: INTORNO SFERICO DI RAGGIO M E CENTRO O