7.03.2018

Analisi 2

Prof. CLAUDIO BONANNO.

MASTER COPY
Tel. 050 501 21 26
Cell. 333 9837745

Info sul corso:

Pagina web → Didattica → PROGRAMMA
→ REGISTRO LEZIONI
→ ESERCIZI e COMPITI
→ RICEVIMENTO (Martedì 17:00 / Giovedì 9:30)

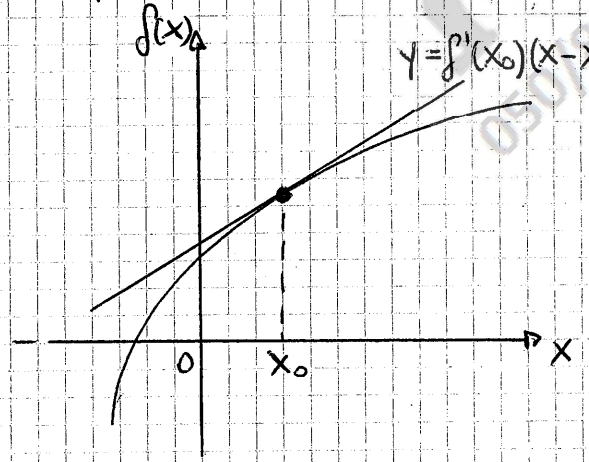
In questo corso considereremo le <u>funzioni a più variabili</u>.

$$f: \underset{x}{\mathbb{R}} \times \underset{y}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \qquad f(x,y)$$

funzioni a 2 variabili: Ad esempio misurano la temperatura terrestre, o descrivere un punto su una sfera.

Basteranno tre variabili per descrivere ciò di cui ho bisogno?
No! Ci sono funzioni molto più complesse, con variabili molto più grandi.

Le <u>APPLICAZIONI LINEARI</u> sono PARTICOLARI FUNZIONI A PIÙ VARIABILI, perché oltre ad essere funzioni sono lineari, $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Il grafico di una funzione vive nel prodotto cartesiano del suo dominio e codominio

Questa funzione sarà continua?
Sì è continua, nell'insieme in cui l'ho disegnata.

Sarà derivabile in tutti i punti?
Sì perché guardando il grafico non ci sono punti spigolosi.
L'altra proprietà della derivabilità, che dobbiamo sapere, è che il grafico può essere approssimato alla RETTA TANGENTE AL GRAFICO della funzione:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ Equazione retta tangente.

Quindi se io considero i punti di questa forma:
$\{(x, f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
questo è un modo per scrivere i punti della retta tg e grafico L.

$$\text{Graf. } L = \{(x, L(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Questa applicazione sarebbe lineare se Imm $(0) = 0$ (il grafico passa per l'origine)
Perciò è un'applicazione AFFINE (applicazione lineare + costante)

Le APPLICAZIONI LINEARI rappresentano oggetti per approssimare le funzioni:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + o(x - x_0)$$

Teorema del polinomio di Taylor.

▽ USARE UN LINGUAGGIO ADEGUATO ▽

INIZIO del CORSO.

Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ inteso come spazio "FISICO", non vettoriale. I punti di $\mathbb{R}^n$ saranno indicati con lettere maiuscole, P, e sarà identificato con delle coordinate avendo un punto O fissato, l'origine.

$P=(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ CASI PARTICOLARI: $n=2$ $P=(x,y)$

$n=3$ $P=(x,y,z)$

Doteremo il punto di una DISTANZA, che in generale è una funzione d definita da una coppia di punti definita su $\mathbb{R}$ con delle proprietà:

i) distanza tra due punti ≥ 0 e vale 0 solo se i due punti coincidono.

ii) la distanza tra P e Q deve essere uguale alla distanza tra Q e P

iii) Disuguaglianza triangolare.

DISTANZA: $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

i) $d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^n$ e $d(P,Q)=0 \iff P=Q$

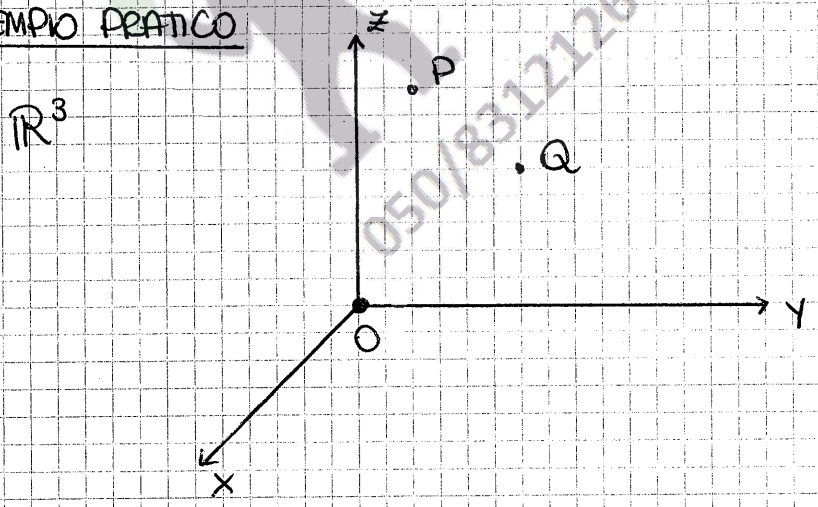
ii) $d(P,Q) = d(Q,P) \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^n$

iii) disuguaglianza triangolare:

$\forall P,Q,R \in \mathbb{R}^n$

$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

ESEMPIO PRATICO



UN ESEMPIO di distanza è quella EUCLIDEA, definita in generale in $\mathbb{R}^n$.

$P=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ $\quad de(P,Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+\dots+(p_n-q_n)^2}$

$Q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ $\quad$ distanza euclidea

Un' altro esempio di distanza, la chiamo d_1 la posso definire come:

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$$d_1 = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + \dots + |p_n - q_n|$$

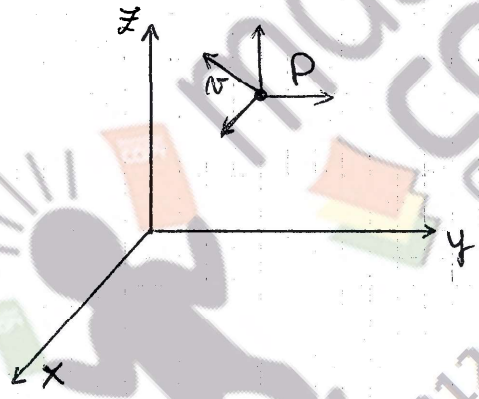
un' altra distanza:

$$d_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |p_i - q_i|$$

Preso un punto P del nostro spazio fisico $\mathbb{R}^n$ considero SPAZIO TANGENTE ad $\mathbb{R}^n$ in T, spazio vettoriale di vettori V di n componenti applicati in P.

Preso $P \in \mathbb{R}^n$, considero $T_P \mathbb{R}^n$ spazio vettoriale di vettori $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ applicati in P.

CASO $n=3$



$T_P \mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

master copy COPISERIA 050/8312126 388/9837745
MASTER COPY tel. 050 831 21 26 cell. 388 9837745

NORMA DI UN VETTORE

NORMA: $\|\circ\| : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in T_p\mathbb{R}^n$, $\|v\| = 0 \iff v = 0$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in T_p\mathbb{R}^n$

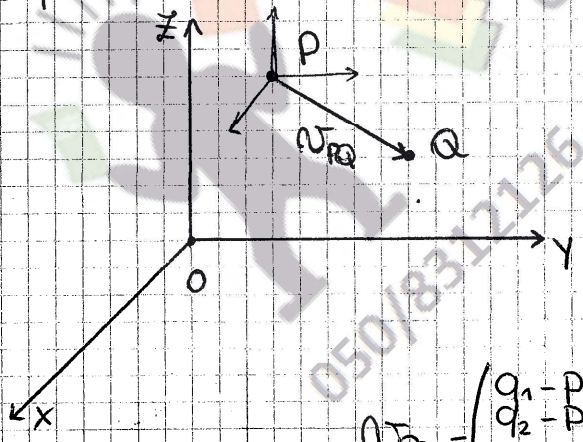
iii) $\forall v, w \in T_p\mathbb{R}^n$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

QUALUNQUE FUNZIONE CHE SODDISFA QUESTE TRE PROPRIETA' PUO' ESSERE CONSIDERATA UNA NORMA

NORMA EUCLIDEA (caso particolare)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \|v\|_e = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Come nel caso della distanza, esistono altre norme che si definiscono in modo analogo.
Anche perché tra norma e distanza ho un legame:



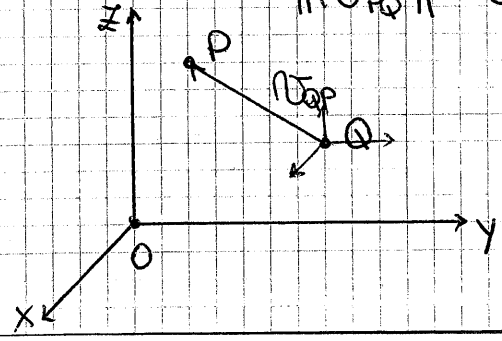
$v_{PQ} \in T_p\mathbb{R}^n$

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

$Q = (q_1, q_2, \dots q_n)$

$$v_{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

PERCIO': $\|v_{PQ}\| = d(P,Q)$



$T_Q\mathbb{R}^n$

$\|v_{QP}\| = \|v_{PQ}\|$

PRIVATO COPIA 050/8312126 388/9[illegible]774