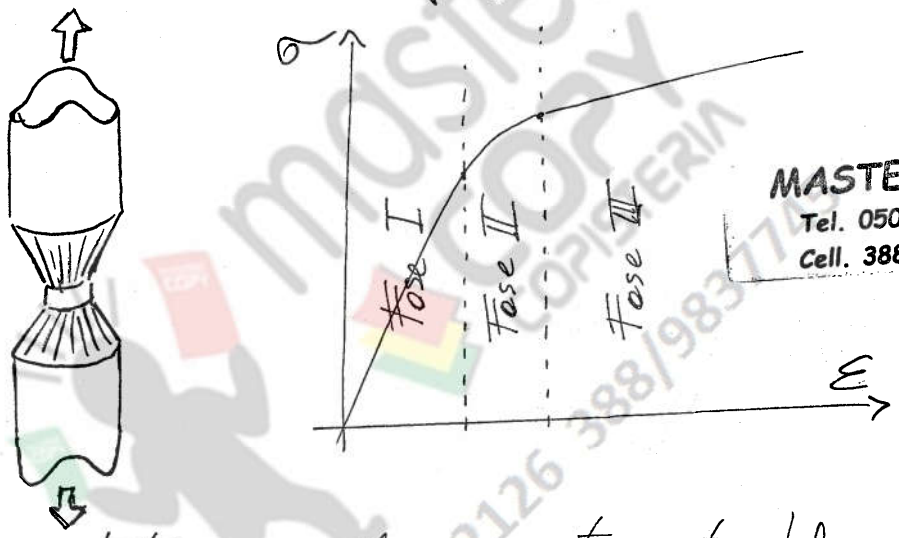
TEORIA DELLA PLASTICITÀ

Al fine di studiare il procedere delle deformazioni all'interno di un materiale si fa uso dei modelli matematici propri della teoria dei Legami Costitutivi.
Tali modelli sono ricostruiti per mezzo di prove sperimentali su strutture semplici, staticamente determinate, per le quali sia esatto l'equilibrio.
Le prove più usate sono quelle monoassiali, tipicamente di Trazione. Attraverso l'allungamento di un provino si ricostruisce così un grafico (σ-ε).

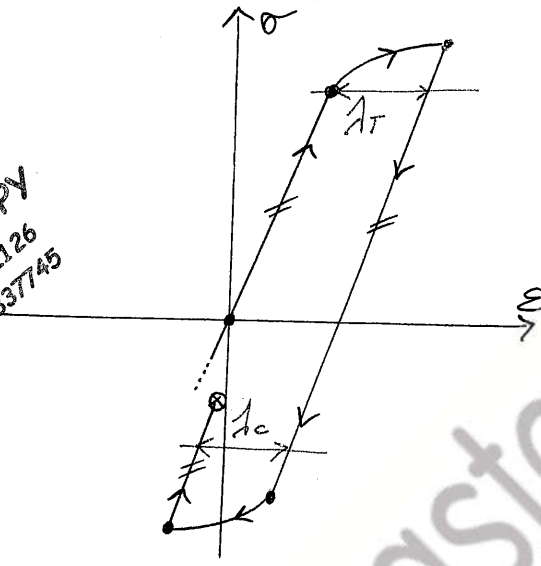


MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Possiamo distinguere il comportamento deformativo in 3 fasi.
In una prima fase si ha un legame elastico lineare, completamente restitutivo, ed è definito un unico modulo elastico E.
In seguito, per un breve tratto si ha la perdita della proprietà di linearità della fase elastica.
Infine, nella terza fase, detta elasto-plastica, a piccoli incrementi delle tensioni corrispondono grandi variazioni nelle deformazioni. Inoltre le deformazioni elasto-plastiche non sono più restitutive, ma, in parte, irreversibili.

IL LEGAME COSTITUTIVO MONOASSIALE

Si immagini che il provino sia sottoposto ad un ciclo di carico e scarico



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

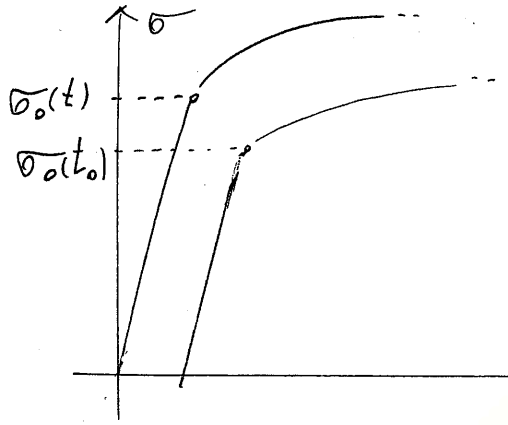
Raggiunto il limite elastico lineare si inizia a formare deformazioni irreversibili, infatti eseguito lo scarico elastico (parallelo al carico) esse non si recuperano. Sottoposto poi ad un carico di segno diverso il campione raggiunge un nuovo limite elastico, subisce deformazioni permanenti di segno diverso e poi si scarica in modo elastico.

Dunque qualsiasi passaggio in fase plastica comporta l'irreversibilità dello stato di deformazione. Il comportamento di un materiale è così funzione dei carichi che gli sono stati applicati precedentemente, si parla allora di legame costitutivo con memoria e di dipendenza dalla storia dei carichi.
Il legame costitutivo che tiene conto di questo fatto non potrà che essere scritto in termini incrementali.
Si definiscono inoltre alcune variabili interne al materiale, costanti e positive, che ne caratterizzano i comportamenti deformativi:

- λ_T deformazione plastica a trazione
- λ_C deformazione plastica a compressione

Devono essere non negativi anche i rispettivi incrementi

Un altro parametro del comportamento deformativo influenzato dalla storia dei carichi è la tensione che caratterizza il limite della fase elastica. Tale tensione è detto di snervamento

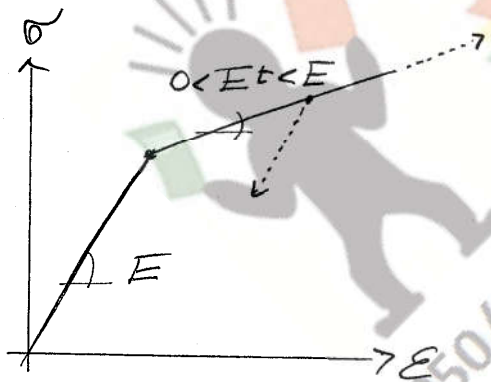


$$\sigma_0(t) = \sigma_0(\lambda_T, \lambda_c)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Consideriamo ora cosa succede al materiale dopo aver superato il limite elastico.
Possiamo distinguere diverse categorie di comportamento

Incrudimento



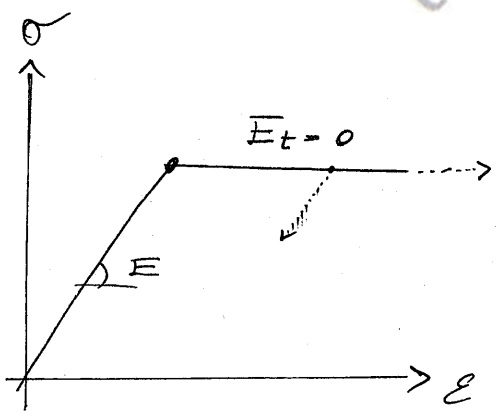
legame Diretto

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} \geq 0 & \dot{\sigma} = E_t \cdot \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 & \dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon} \end{cases}$$

legame Inverso

$$\begin{cases} \dot{\sigma} \geq 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_t \\ \dot{\sigma} \leq 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E \end{cases}$$

Plasticita' Perfetta



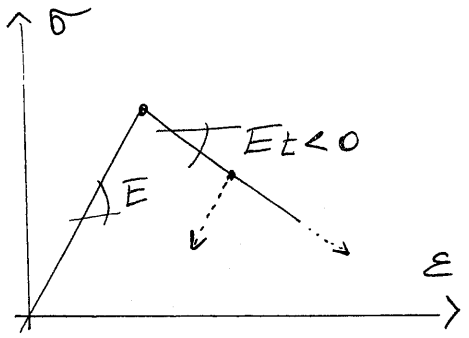
legame Diretto

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} \geq 0 & \dot{\sigma} = 0 \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 & \dot{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon} \end{cases}$$

legame Inverso

$$\begin{cases} \dot{\sigma} > 0 & \text{Imp.} \\ \dot{\sigma} = 0 & \dot{\varepsilon} \geq 0 \text{ non det.} \\ \dot{\sigma} < 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E \end{cases}$$

Softening



legame Diretto

$\dot{\varepsilon} \geq 0 \quad \dot{\sigma} = E_t \dot{\varepsilon} < 0$

$\dot{\varepsilon} \leq 0 \quad \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}$

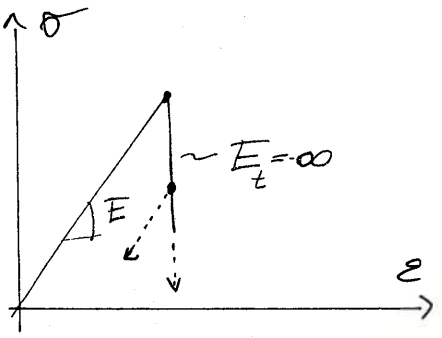
legame Inverso

$\dot{\sigma} > 0$ Imp

$\dot{\sigma} = 0 \quad \dot{\varepsilon} = 0$

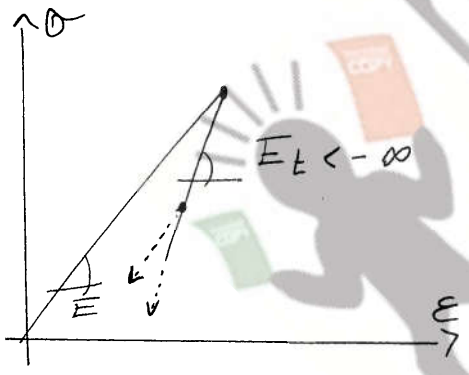
$\dot{\sigma} < 0 \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E$ se $\varepsilon > 0$; $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_t$ se $\dot{\varepsilon} < 0$

Softening Critico



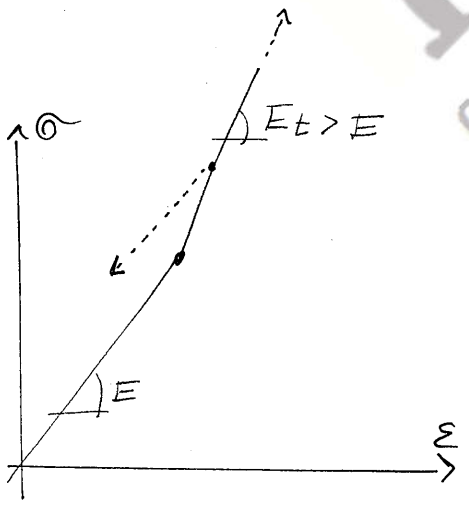
legame Diretto		legame Inverso	
$\dot{\varepsilon} > 0$	Imp	$\dot{\sigma} > 0$	Imp
$\dot{\varepsilon} = 0$		$\dot{\sigma} = 0$	$\dot{\varepsilon} = 0$
$\dot{\varepsilon} < 0$	$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$	$\ddot{\sigma} < 0$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\ddot{\sigma}}{E} = \frac{\dot{\sigma}}{E}$

Softening sub-Critico



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

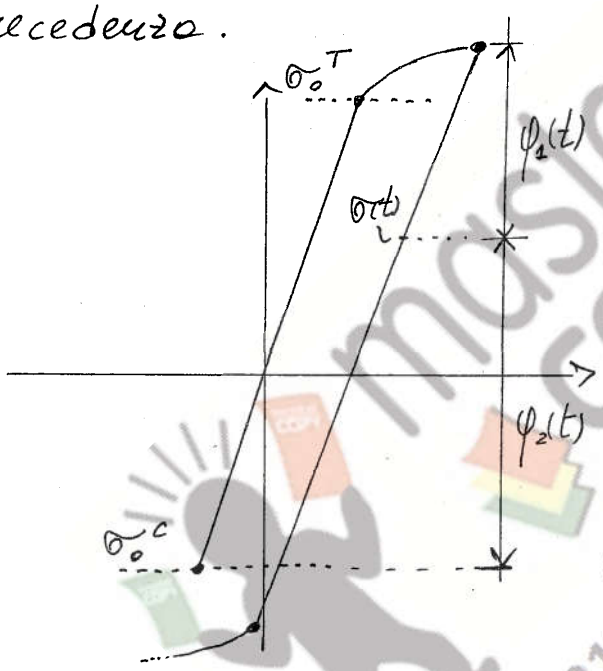
Locking



E' l'unico caso in cui la rigidezza in fase post elastico aumenta

LE FUNZIONI DI PLASTICITÀ

Dato un materiale vergine, per cui dunque non esiste una storia dei carichi, le tensioni limite a compressione e trazione σ_0^T e σ_0^c definiscono un dominio istantaneo elastico.
In generale non potendo considerare mai nulla la storia di carico di un materiale il dominio istantaneo elastico varia con i carichi applicati in precedenza.



$$-\sigma_0^c(t) \leq \sigma(t) \leq \sigma_0^T(t)$$

Immagine allora delle funzioni di plasticità, foliche...

$$\begin{cases} \sigma(t) \leq \sigma_0^T(t) \\ \sigma(t) \geq -\sigma_0^c(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma(t) - \sigma_0^T(t) \leq 0 \\ -\sigma(t) - \sigma_0^c(t) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \sigma(t) - \sigma_0^T(t) \leq 0 \\ \varphi_2(t) = -\sigma(t) - \sigma_0^c(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underline{\sigma}(t) - \underline{\sigma}_0(t) \leq 0$$

$$= N^T \underline{\sigma} - \sigma_0 \leq \underline{0}$$

$$\boxed{\underline{\varphi}(t) = N^T \cdot \underline{\sigma} - \sigma_0 \leq \underline{0}}$$

Bandiamente dunque se $\varphi(t) < 0$ il corpo è ancora in fase elastica, viceversa se $\varphi(t) = 0$ si ha la superficie limite di plasticità.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837743