SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

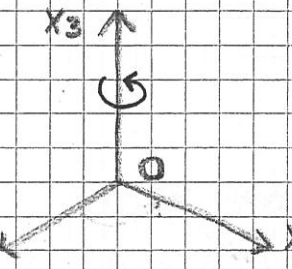
Essa si preoccupa di studiare dei problemi dove non ci possiamo affidare solo alle equazioni della statica ma dobbiamo anche attingere informazioni dal "mondo" degli spostamenti e delle deformazioni.

SISTEMI PIANI DI FORZE

Una FORZA è una qualunque causa atta a produrre una variazione dello stato di quiete o di moto di un corpo oppure a deformarlo.
La forza è un particolare vettore caratterizzato da intensità, direzione e verso; più forze costituiscono un sistema di forze, che si rappresenta con (A_i, F_i) $i = 1, _, n$ dove A_i è il punto di applicazione di F_i.

$A \nearrow \underset{\sim}{v}$ $(A, \underset{\sim}{v})$ OPPURE $A \nearrow^{P} \underset{\sim}{v}$ P-A

Quando si lavora coi vettori spesso si lavora con un sistema di riferimento cartesiano con origine O, con i 3 assi ortogonali ed assumendo che la terna sia levogira (cioè se x_1 si sovrappone a x_2 in senso antiorario).



Definendo che la terna sia levogira => si definiscono anche le rotazioni sulla terna: le rotazioni attorno agli assi sono positive quando sono concordi al sistema levogiro.
La rotazione di x_3 è positiva se ruota nello stesso verso dello spostamento di x_1 (analogo per gli altri assi).
Con questo sistema di riferimento si può definire il vettore come:

$$(A, \underset{\sim}{v}) : \quad A\begin{cases} x_1(A) \\ x_2(A) \\ x_3(A) \end{cases} \qquad \underset{\sim}{v}\begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{v} = v_1 \underset{\sim}{i}_1 + v_2 \underset{\sim}{i}_2 + v_3 \underset{\sim}{i}_3$$

$$P\text{-}A : \begin{cases} x_1(P) - x_1(A) \\ x_2(P) - x_2(A) \\ x_3(P) - x_3(A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_i = x_i(P) - x_i(A) \qquad i = 1, 2, 3$$

Un sistema di forze è detto PIANO quando le rette di azione delle forze appartengono tutte ad un piano.

Il MOMENTO SCALARE di Fi rispetto al polo O è il prodotto del modulo della forza per la distanza del polo dalla retta di azione della forza: BRACCIO



$\underset{\sim}{M}(O) = (A-O) \wedge \underset{\sim}{U}$ VETTORE MOMENTO DEL VETTORE $\underset{\sim}{U}$ RISPETTO A O

$\underset{\sim}{M}(O) \perp$ al piano

$|\underset{\sim}{M}(O)| = |\overline{OA}| \cdot |\underset{\sim}{U}| \cdot \sin\alpha \longrightarrow |\overline{OA}| \cdot \sin\alpha = d$

$\Rightarrow \boxed{|Mo| = |\underset{\sim}{U}| \cdot d} \Rightarrow |\underset{\sim}{M}(O)|$ dipende da 2 parametri: $|\underset{\sim}{U}|$ e d.

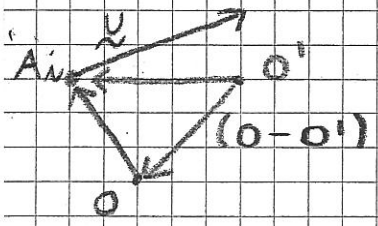
La RISULTANTE di un sistema piano di forze è la forza che, agendo sullo stesso corpo, produce lo stesso effetto delle forze date:

$$\boxed{\underset{\sim}{R} = \sum_{i=1}^{\wedge} \underset{\sim}{U}i}$$ (non dipende da O)

Il MOMENTO RISULTANTE di un sistema piano di forze rispetto al polo O è la somma algebrica dei momenti delle singole forze rispetto al polo O:

$$\boxed{\underset{\sim}{M}(O) = \sum_{i=1}^{\wedge} (Ai - O) \wedge \underset{\sim}{U}i}$$ (dipende fortemente da O)

Per capire la dipendenza di $\underset{\sim}{M}(O)$ da O consideriamo un altro caso:



$$\underset{\sim}{M}(O') = \sum_{i=1}^{\wedge} (Ai - O') \wedge \underset{\sim}{U}i$$

$$= \sum_{i=1}^{\wedge} [(Ai - O) + (O - O')] \wedge \underset{\sim}{U}i$$

$$= \sum_{i=1}^{\wedge} (Ai - O) \wedge \underset{\sim}{U}i + \sum_{i=1}^{\wedge} (O - O') \wedge \underset{\sim}{U}i$$

$$= \sum_{i=1}^{\wedge} (Ai - O) \wedge \underset{\sim}{U}i + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^{\wedge} \underset{\sim}{U}i$$

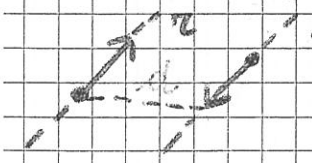
$\Rightarrow$ $\boxed{\underset{\sim}{M}(O') = M(O) + (O-O') \wedge \underset{\sim}{R}}$

È importante poichè il momento risultante di un sistema di vettori applicati S ($S = \{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, _, \underset{\sim}{u}_n\}$) rispetto a un polo O' è pari alla somma del momento risultante di S rispetto ad O e del momento rispetto a O' della risultante.

Ne consegue una condizione necessaria e sufficiente: affinchè il sistema S abbia uguale momento rispetto ad ogni punto dello spazio deve accadere che $\underset{\sim}{R} = 0$.

$\underset{\sim}{R} = 0 \rightarrow \underset{\sim}{M}(O') = \underset{\sim}{M}(O)$	cioè per ogni sistema che ha la risultante nulla il momento rispetto a qualsiasi punto non cambia.

Il più semplice sistema di vettori con $R=0$ è la <u>COPPIA</u> ($\underset{\sim}{M}(O) \neq 0$ e costante in ogni punto):



Una coppia di forze è un sistema composto da 2 forze di uguale modulo ma verso opposto parallele, applicate a 2 punti diversi di un corpo.

$|\underset{\sim}{M}(O)| = |\underset{\sim}{u}| \cdot d$, $\underset{\sim}{M}(O) \neq 0 \Rightarrow \underset{\sim}{R} = 0$.

2 sistemi di forze sono <u>EQUIVALENTI</u> se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto a qualsiasi polo O, cioè $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}'$ e $\underset{\sim}{M}(O) = \underset{\sim}{M}(O')$.

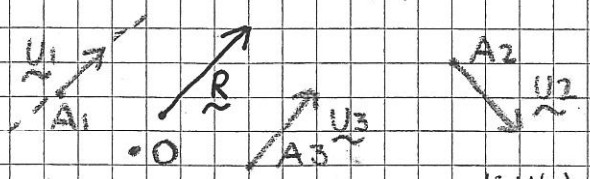
Un sistema di forze si dice <u>EQUIVALENTE A ZERO / NULLO</u> se la risultante è nulla e se il momento risultante è nullo, cioè $\underset{\sim}{R} = 0$ e $\underset{\sim}{M}(O) = 0$. (RISPETTO A QUALSIASI POLO O)

Un sistema di forze si dice <u>EQUILIBRANTE</u> se le forze applicate ad un corpo lasciano imperturbato lo stato di quiete o di moto del corpo:

$S \rightarrow \underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{M}(O) \qquad S' \rightarrow \underset{\sim}{R}', \underset{\sim}{M}'(O)$

S' è equilibrante a S se $\underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{R}' = 0$ e $\underset{\sim}{M}(O) + \underset{\sim}{M}'(O) = 0$.

Si consideri un sistema piano:

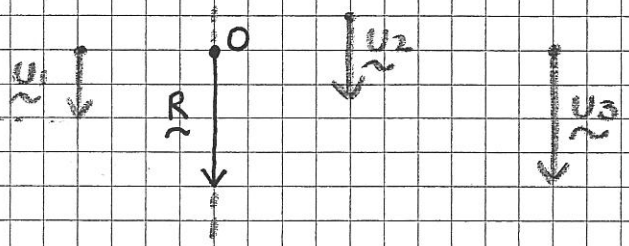


PIANO Π

$\underset{\sim}{R}$ è $\perp$ al piano ed il verso di M(O) è dettato dal senso di rotazione del vettore $\underset{\sim}{u}$ intorno al polo O: se ruota in senso antiorario $\Rightarrow$ M(O) sarà uscente dal piano (POSITIVO); se ruota in senso orario $\Rightarrow$ M(O) sarà entrante al piano (NEGATIVO).

$\underset{\sim}{M}(O) = \sum \underset{\sim}{M}_i(O) = \sum |M_i(O)| \cdot \underset{\sim}{i}$ in questo modo tutti i vettori sono $\perp$ al piano e si SOMMANO "in FILA".

Si consideri un sottoinsieme del sistema piano con vettori tutti // tra loro:



Se tutti i vettori sono // $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{R}$ è //.

Quindi si hanno 2 sistemi:

$S = \{ u_1, u_2, u_3, \dots \} \longrightarrow \underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{M}(O)$

$S' = \{ \underset{\sim}{R} \} \longrightarrow \underset{\sim}{R}', \underset{\sim}{M}'(O)$

Assumendo che i 2 sistemi siano equivalenti $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}'$ e $\underset{\sim}{M}(O) = \underset{\sim}{M}'(O)$.

A questo punto si prende il punto $O \in \underset{\sim}{R}$ e si avrà $\underset{\sim}{M}(O) = 0$

$\Rightarrow \underset{\sim}{M}(O) = \underset{\sim}{M}'(O) = 0$

$\Rightarrow$ S ha $\underset{\sim}{M}(O) = 0$ rispetto al punto O dove passa $\underset{\sim}{R}$

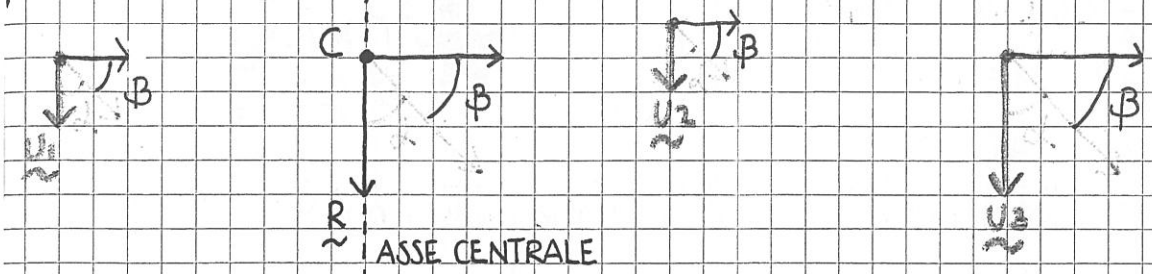
Non è importante il punto O: può essere qualsiasi punto $\in$ alla retta di applicazione di $\underset{\sim}{R}$.

L'ASSE CENTRALE è l'asse dove scorre $\underset{\sim}{R}$ affinchè 2 sistemi siano equivalenti.

Se i vettori ruotassero di un certo angolo α $\Rightarrow$ anche $\underset{\sim}{R}$ ruoterebbe di un certo angolo α (ma non si sa rispetto a quale punto ruota).

Si può dimostrare che se i vettori ruotassero ancora di un certo angolo β $\Rightarrow$

anche $\underset{\sim}{R}$ ruoterebbe ancora di un certo angolo β ma ancora attorno allo stesso punto di prima; questo punto è detto CENTRO DEL SISTEMA*(C).



DIMOSTRAZIONE ESISTENZA E POSIZIONE DI C:

Se tutti i vettori sono diretti lungo la stessa direzione $\underset{\sim}{u_i}$ $\Rightarrow$

$\underset{\sim}{u_i} = u_i \cdot \underset{\sim}{e} \Rightarrow \underset{\sim}{R} = R \cdot \underset{\sim}{e}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{R} = \sum \underset{\sim}{u_i} = \sum u_i \underset{\sim}{e}$

$\Rightarrow R\underset{\sim}{e} = \sum u_i \underset{\sim}{e} \Rightarrow R = \sum u_i$

Quindi il modulo di R non è altro che la somma del modulo di tutti i vettori ed $\underset{\sim}{e}$ è una qualsiasi direzione di applicazione identica per tutti i vettori.

Supponiamo che $\underset{\sim}{R}$ sia applicata in C e consideriamo un sistema s' che sia equivalente all'insieme dei vettori $\underset{\sim}{u_i}$:

$\Rightarrow \underset{\sim}{M}(O) = \sum (A_i - O) \wedge \underset{\sim}{u_i} = \underset{\sim}{M'}(O) = (C-O) \wedge \underset{\sim}{R}$

$\Rightarrow \sum (A_i - O) \wedge \underset{\sim}{u_i} = (C-O) \wedge \underset{\sim}{R}$

$\Rightarrow \sum (A_i - O) \wedge u_i \cdot \underset{\sim}{e} = (C-O) \wedge R \cdot \underset{\sim}{e}$

$\Rightarrow \sum u_i (A_i - O) \wedge \underset{\sim}{e} = R(C-O) \wedge \underset{\sim}{e}$

* e * nel prodotto vettore rispetto a $\underset{\sim}{e}$ danno la stessa quantità, quindi vuol dire che sono uguali.

$\Rightarrow R(C-O) = \sum u_i (A_i - O)$

$\Rightarrow \boxed{C - O = \frac{1}{R} \sum u_i (A_i - O)}$

quindi in funzione di qualsiasi variazione della direzione delle forze il punto C non cambia.

Questa formula è importante perchè dato un sistema di vettori ci permette