ANALISI I - Prof BOTTAZZO Ingegneria meccanica schemi

LIMITI

$A \subset \mathbb{R}$ $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \overline{A}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$

DEFINIZIONE

- $\lim_{x \to x_0} = l$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \to l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
- $\lim_{x \to x_0} = \pm\infty$ $\forall H > 0, \exists \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \to f(x) \gtrless \pm H$
- $\lim_{x \to \pm\infty} = l$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : x \gtrless \pm N \to l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
- $\lim_{x \to \pm\infty} = +\infty$ $\forall H > 0, \exists N > 0 : x \gtrless \pm N \to f(x) > H$
- $\lim_{x \to \pm\infty} = -\infty$ $\forall H > 0, \exists N > 0 : x \gtrless \pm N \to f(x) < -H$

TEOREMA di unicità del limite

Il limite, se esiste, è unico

TEOREMA di esistenza del limite

Se esistono il limite destro e il limite sinistro e coincidono, allora esiste il limite (e viceversa)

$\lim_{x \to x_0^+} = \lim_{x \to x_0^-} = l \iff \lim_{x \to x_0} = l$

TEOREMA della permanenza del segno

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \geq 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $x \in U \to f(x) \geq 0$

TEOREMA del confronto (o dei due carabinieri)

Se in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

allora anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

FORME INDETERMINATE $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 0^0, $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = k$ $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ $\lim_{x \to 0} x \log x = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

NB: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ORDINE DI INFINITI

$\log n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$

o PICCOLO

DEFINIZIONE

$f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\exists w(x)$: 1) $f(x) = w(x) \cdot g(x)$

2) $\lim_{x\to x_0} w(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $(g(x) \neq 0 \text{ in } I(x_0))$

PROPRIETÀ

$o(g) + o(g) = o(g)$

$o(g) - o(g) = o(g)$

$o(g_1 + g_2) = o(g_1) + o(g_2)$

$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$

$o(kg) = k\, o(g)$ e $n \cdot o(g) = o(g)$ $n \in \mathbb{R}$

$o(o(g)) = o(g)$

$o(g) / o(g) = \text{BOH!}$

SVILUPPINI $x \to 0$

$\sin x = x + o(x)$

$\cos x = 1 + o(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\tan x = x + o(x)$

$\arcsin(2x^2) = \arctan(2x^2) = o(x)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$x^a = o(x^b)$ $a > b$

$\arcsin x = x + o(x)$

$\arctan x = x + o(x)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

SUCCESSIONI

TEOREMI DI CESÀRO

Ⓘ $a_n \to l \Rightarrow \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \to l$

Ⓘ $a_n - a_{n-1} \to l \Rightarrow \frac{a_n}{n} \to l$

Ⓘ $a_n \to l \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \to l$ se $a_n \geq 0$

Ⓘ $a_n \geq 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to l$ → criterio rapporto ⇒ criterio radice

TEOREMA della radice

$a_n > 0$ definitivamente, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

allora: • se $l > 1$ $a_n \to +\infty$ • se $l < 1$ $a_n \to 0$ • se $l = 1$ boh!

TEOREMA del rapporto

$a_n > 0$ definitivamente, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora: • se $l > 1$ $a_n \to +\infty$ • se $l < 1$ $a_n \to 0$ • se $l = 1$ boh!

FORMULA di Stirling

$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ semplificata $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$

CONDIZIONE NECESSARIA

$a_n > 0$ definitivamente, allora a_n ammette limite

Alcuni limiti di successioni

$\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & a>0 \\ 0^+ & a<0 \end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (valgono anche i limiti notevoli e l'ordine di infinito)

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

se $f' > 0$ definitivamente $\Rightarrow$ pari e dispari

p: $a_0 = \dots$ $a_{n+1} = f(a_n)$ d: $a_0 = \dots$ $b_{n+1} = f(f(x))$

se $l_p = l_d \Rightarrow L$ se $l_p \neq l_d \Rightarrow \nexists L$

STRATEGIE DI CALCOLO

- serie autonoma (compare a_n ma non n): $a_{n+1} = f(x)$ $x = a_n$ e studio f calcolo il limite $L = f(L)$
- serie non autonoma: calcolo i primi termini cercando di determinare la legge di a_n

DERIVATE

CONTINUITÀ

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$, f è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0^-} f = \lim_{x\to x_0^+} f = f(x_0)$

Proprietà: f, g continue $\Rightarrow$ $(f+g)$ continua, $(f\cdot g)$ continua, $f \vee g$ e $f \wedge g$ continue

f continua $\Rightarrow$ $|f|$ continua, $\frac{1}{f}$ continua su $\{x : f(x) \neq 0\}$

DEFINIZIONE derivata

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di A.

Rapporto incrementale di f rispetto a x_0

$$= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Derivata $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Differenziale $f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$ per $h \to 0$ con $\alpha = f'(x)$

TEOREMA

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0 (non vale il viceversa)

PROPRIETÀ delle derivate

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f\cdot g)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$(\alpha f)' = \alpha f'$ $\alpha \in \mathbb{R}$ costante

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
$\alpha \in \mathbb{R}$		0
αx		α
x^α		$(\alpha-1)x^{\alpha-1}$
$a^x \; e^x$		$a^x \log a \quad e^x$
$\log x$		$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
$\sin x$		$\cos x$
$\cos x$		$-\sin x$
$\tan x$		$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
$\arcsin x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$		$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$		$\frac{1}{1+x^2}$

Derivata della funzione inversa

$f(x)$ una funzione, $g(x)$ la sua inversa: $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

TEOREMA di De l'Hôpital

$f(x), g(x)$ due funzioni, $x_0 \in \mathbb{R}$ allora:

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ se:

1) si può dividere per $g(x)$ e $g'(x)$
2) il limite $f(x)/g(x)$ sia $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
3) esiste il limite $f'(x)/g'(x)$

EQUIVALENZA ASINTOTICA $x \to 0$

$\sin x \sim x$ $\quad \arcsin x \sim x$ $\quad e^x \sim 1+x$

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ $\quad \log(1+x) \sim x$

$\tan x \sim x$ $\quad \arctan x \sim x$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\sinh(x)' = \cosh(x)$ $\quad \cosh(x)' = \sinh(x)$

Proprietà di simmetria

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$ DISPARI

$\cosh(-x) = \cosh(x)$ PARI

$\tanh(-x) = -\tanh(x)$ DISPARI

Relazione fondamentale

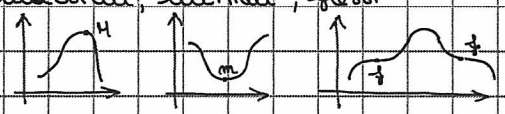
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$

PUNTI STAZIONARI

I punti stazionari di una funzione $f(x)$ sono quei punti x tali che $f'(x) = 0$

↳ sono: massimi, minimi, flessi



SEGNO $f'(x)$ e $f''(x)$

Il segno della derivata prima individua gli intervalli in cui la funzione cresce e decresce.

$f' > 0 \rightarrow f \nearrow$ cresce $\qquad f' < 0 \rightarrow f \searrow$ decresce

$f'' > 0 \rightarrow f' \nearrow \rightarrow f \cup$ convessa $\qquad f'' < 0 \rightarrow f' \searrow \rightarrow f \cap$ concava

FUNZIONI

Definizione $f: A \rightarrow B$

Una funzione è una relazione tra due insiemi, chiamati dominio[A] e codominio[B] della funzione, che associa ad ogni elemento del dominio uno e un solo elemento del codominio.

- f PARI $f(x) = f(-x)$ simmetrica rispetto all'asse y
- f DISPARI $f(x) = -f(-x)$ simmetrica rispetto all'origine
- f PERIODICA se $\exists T > 0 : f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in Dom$ il tratto di grafico da 0 a T si ripete
- f CRESCENTE $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- f DECRESCENTE $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f INIETTIVA $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (rette orizzontali con 0 o 1 intersezione con $f(x)$) MONOTONA $\Downarrow$ INIETTIVA
- f SURGETTIVA $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$ (l'immagine di f coincide con il codominio B)
- f BIUNIVOCA f iniettiva e surgettiva
- f INVERSA $f: A \rightarrow B \quad f^{-1}: B \rightarrow A$ (dato $b \in B$ risalire a $a \in A$) f biunivoca
- f CONTINUA $f: A \rightarrow B$, x_0 punto di accumulazione : f continua se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

  TEOREMI: $f(x)$ e $g(x)$ continue $\rightarrow h(x) = f + g$ è continua

  $f(x)$ e $g(x)$ continue $\rightarrow h(x) = f \cdot g$ è continua

  DISCONTINUITÀ: 1ª specie: $\lim_{x \to x_0^+} \neq \lim_{x \to x_0^-}$ almeno uno finito

  2ª specie: $\lim_{x \to x_0^+}, \lim_{x \to x_0^-}$ entrambi infiniti

  3ª specie: $\lim_{x \to x_0^+}, \lim_{x \to x_0^-}$ almeno uno non esiste

TEOREMA del confronto

f, g, h funzioni

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ nell'intorno di x_0

Quindi $\lim_{x \to x_0} g \leq \lim_{x \to x_0} f \leq \lim_{x \to x_0} h$

$\lim_{x \to x_0} g = \ell$, $\lim_{x \to x_0} h = \ell$ $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

TEOREMA di FERMAT

f derivabile in x_0 : • x_0 è minimo o massimo locale f allora $f'(x_0) = 0$

• x_0 interno al dominio