LIMITI

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k} = \frac{x^n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-n}}{x^m \sum_{k=0}^{m} b_k x^{k-n}} = \frac{x^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + a_n \right)}{x^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{k-m} + b_m \right)}$$

se $m > n$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + a^n}{x^{m-n} \sum_{k=0}^{m} b_k x^{k-m} + b^n} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{a_n}{b_m} \right) \cdot \frac{1}{+\infty} = 0$$

a^{k-n} ← è una potenza negativa $\Rightarrow$ es $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a^2} = 0 \quad = \Sigma 0 = 0$

se $m < n$ $\quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + a_n \to 0$ per $x \to +\infty$

$$x^{n-m} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + a_n \right) \to \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \left(\frac{a_n}{b_m} \right)$$

$$\sum b_k x^{k-n} + b_m$$

$= 0$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ se $\frac{a_n}{b_m} > 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$

se $\frac{a_n}{b_m} < 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = l_1 - l_2$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \frac{l_1}{l_2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FORME INDETERMINATE

- $+\infty - \infty$
- $-\infty + \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $(\infty)^0$
- 0^0
- 1^∞

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

INFINITESIMI (per $x \to x_0$)

$f \ll g$ ← entrambi infinitesimi ma con f molto minore di g (si può scrivere anche come $f = o(g)$

se $f \ll g \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f \sim g$ ← f e g sono infinitesimi dello stesso ordine (si può scrivere anche come $f = O(g)$

se $f \sim g \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

$f \approx g$ ← f e g sono fortemente equivalenti

se $f \approx g \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Principio di sostituzione degli infinitesimi (solo PRODOTTI)

$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot h(x)$ dove $f(x)$ è complicata

se $f \approx g$ (g più semplice) $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot h(x)$

Vale anche se ho il prodotto di più di due funzioni

Principio di eliminazione degli infinitesimi (solo SOMMA)

$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x)$

se $f \ll g \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Se ho la somma di più di due funzioni bisogna porre attenzione

$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) + h(x)$

se $f \ll h$, $g \ll h \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) + h(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) + h(x)$$

se $g \sim h$, $f \ll g$, $f \ll h$ non posso eliminare nessuno delle tre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sum_{0}^{n} a_k x^k}{\sum_{0}^{m} b_k x^k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

i valori con $0 \le i < n$ sono molto più piccoli di $i = n$ $\Rightarrow$ li posso togliere

- $f \to 0 \Rightarrow f = o(1)$
- $x \cdot o(1) = o(x)$ $\longrightarrow$ funzione generica che tende a 0 + velocemente di x
- $x^\alpha o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $o(x) - o(x) = o(x)$
- $o(x) \cdot o(x) = o(x^2)$
- $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = o(1)$

se $f(x) = O(x^\alpha)$ allora $f(x)$ si dice di ORDINE α

es. $f(x) = x + x^2 - x^3 \Rightarrow$ ordine 1

$\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \to 1 = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1 \to 0$

$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1 = o(1)$

$\operatorname{sen}(x) - x = x\, o(1)$

$\operatorname{sen}(x) - x = o(x)$

$\operatorname{sen}(x) = o(x) + x$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 333 9337745

FUNZIONI CONTINUE

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \text{acc } A \cap A$

Definizione

Una funzione si dice continua in x_0 se il limite per $x \to x_0$ esiste ed assume il valore:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione si dice continua su un insieme $E \subseteq A$ se è continua in ogni punto di E, ovvero se $\forall x_0 \in E \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Se non viene specificato il campo in cui la funzione è continua si sottointende che è continua in tutto il suo dominio

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ se $f(x)$ è una funzione complessa posso effettuare un cambio di variabile, purché $g(x)$ sia anch'essa continua

$\Rightarrow f(x) = t$

$x = f^{-1}(t)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to g(x_0)} f(g^{-1}(t))$ se scegliamo la $g(x)$ giusta questo 2° limite è + semplice

Funzioni elementari (somma, prodotto, reciproca, composizione, inverse)

- $f(x) = c$
- $f(x) = x$
- $f(x) = \text{sen } x$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = e^x$

→ le operazioni fra funzioni elementari danno a loro volta funzioni elementari

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

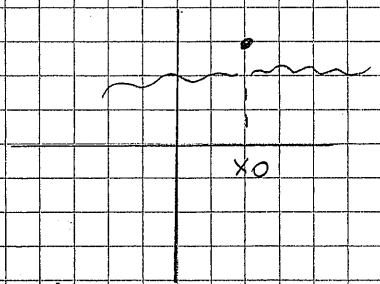
MASTER COPY
Tel. 050 8512126
Cell. 333 3337745

DISCONTINUITÀ

1° tipo: (Eliminabile)

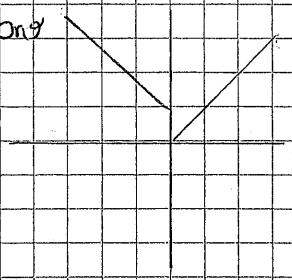
- Limite esiste ma è $\neq f(x_0)$

↳ è eliminabile ridefinendo il valore della funzione ponendo $= f(x_0)$



2° tipo (salto)

- limite per $x \to x_0^{\pm}$ esistono ma sono diversi fra loro (non è eliminabile)



3° tipo

- Almeno uno tra i due $\lim_{x \to x_0^{\pm}}$ non esiste

PERMANENZA DEL SEGNO

Abbiamo $f(x)$ e $g(x)$ e sappiamo che $f(x) \leq g(x)$ vicino a x_0

↳ Se i due limiti esistono $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$ *

PERMANENZA DEL SEGNO

Non conosco $f(x)$ e $g(x)$ ma so che $\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$

$\Rightarrow$ posso dedurre che, vicino a x_0, le funzioni rimangono in questo ordine, ovvero che $f(x) < g(x)$

* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

$\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

ESISTENZA DEGLI ZERI

$f: I \to \mathbb{R}$

:) f continua

:) I intervallo $\Rightarrow f(x) = 0$ ha almeno una soluzione

:) discorde agli estremi

SVILUPPO (AZIO