RACCOLTA ESERCIZI SVOLTI
ALGEBRA LINEARE

Anno 2022-2023

In questa dispensa ho voluto riunire tutti gli esercizi PROPOSTI dal prof. Caboara sulle dispense dell'Anno 2022-2023.

Potete trovare i rispettivi testi e la teoria completa sul sito del Caboara: [https://people.dm.unipi.it/caboara/AlgebraLinare_ING_Chimica_22_23/dispense.pdf]

In più ho voluto aggiungere un piccolo riassunto di tutta la teoria divisa x CAPITOLI (come poi sono divisi gli esercizi).

P.S: Affianco alle dimostrazioni e definizioni più chieste all'orale ho messo delle (X), quelle sono delle domande sicure che fa ogni volta il Caboara all'esame orale (^_^).

[→ Ho fatto un'altra dispensa con le domande fatte all'orale o al ricevimento con un formulario... se vi interessa.]

Spero che vi possa essere di aiuto.

INGEGNERIA CHIMICA

PROFESSORE M. CABOARA

master COPY COPISTERIA

-Alessandra De Antoniis.

master COPY

master COPY

POLINOMI:

Definiamo come $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dato un polinomio:

$$f(x) \in \mathbb{R}[x],\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

- $n = \deg f(x)$, cioè il grado.
- termine di testa è x^n, mentre a_n è il coefficiente di testa.
- IL GRADO DEL POLINOMIO $\emptyset$ NON È DEFINITO.
- principio d'identità dei polinomi:

$$f(x) \equiv_{\mathbb{R}[x]} g(x) \iff n = m \text{ e } \forall i : 1 \dots n \text{ si ha } a_i = b_i$$

- SOMMA di 2 polinomi ha deg $\leq$ massimo dei gradi dei due.
- PRODOTTO di 2 polinomi ha deg = somma dei gradi dei due (se nessuno è nullo).
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$
- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + (-1)^{i+1} a^i b^{n-1} + \dots + b^{n-1})$
- Teorema del Binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad \text{con } \binom{n}{i} = \frac{n!}{k!(n-1)!} \qquad \boxed{0! = 1}$$

dove $\binom{n}{i}$ è l'elemento della n-esima riga, i-esima colonna del triangolo di Tartaglia.

GRUPPI, ANELLI, CAMPI:

Sia G un insieme, "e" $\in G$ e $\oplus$ un operazione tale che sia:

- associativa: $\forall a,b,c \in G\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \Rightarrow a \oplus b \oplus c$.
- "e" è l'elemento neutro: $\forall a \in G, a \oplus e = a$.
- inverso additivo: $\forall a \in G, a \neq e\ \exists\ b \in G$ tc. $a \oplus b = b \oplus a = e \Rightarrow b = -a$.

Allora $(G, \oplus)$ è <u>gruppo</u>. Se $a \oplus b = b \oplus a$ (l'operazione $\oplus$ è COMMUTATIVA) si dice gruppo commutativo.

Sia A un insieme, $\emptyset$ e $1 \in A$ e $\oplus, \odot$ operazioni tali che:

- $(A, \oplus)$ sia un gruppo commutativo con neutro additivo 0.
- $\forall a \in A, \emptyset \odot a = a \odot \emptyset = \emptyset$ | SE non soddisfa questa condizione è campo.
- $\forall a \in A, a \odot 1 = a$ (1 è neutro moltiplicativo).
- distributività del prodotto sulla somma: $\forall a,b,c \in A, a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus a \odot c$

Allora $(A, \oplus, \odot)$ è <u>anello</u>. Se l'operazione $\odot$ è commutativa si dice anello commutativo.

Sia $(A, \oplus, \odot)$ un campo e $B \subset A$ tc B sia chiuso rispetto alle operazioni $\oplus, \odot$ (ovvero che l'operazione di due elementi dell'insieme sia un elemento dell'insieme stesso). Allora B si dice <u>sottocampo</u> di A.

Un polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ (campo generico) di grado ≥ 1 che non abbia divisori PROPRI si dice irriducibile.

- Teorema di fattorizzazione unica: Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]\ \exists!\ f_1(x), \dots, f_m(x) \in \mathbb{K}[x]$ irriducibili distinti e $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}^+$ tc $f(x) = \prod_{i=1}^{m} f_i(x)^{\alpha_i} = f_1(x)^{\alpha_1} \cdots f_m(x)^{\alpha_m}$ (commutatività del prodotto)

<u>SE</u> due polinomi in $\mathbb{K}[x]$ non hanno fattori irriducibili comuni $\Rightarrow$ <u>COPRIMI</u>.

- Teorema delle radici: Sia

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$$

tutte le RADICI RAZIONALI sono date da un divisore del termine noto diviso un divisore del termine di testa [troviamo solo tutti i fattori lineari del polinomio].

- Teorema di Ruffini: Sia $f(x)$ un polinomio in $\mathbb{K}[x]$ e $a \in \mathbb{K}$. Allora

$$f(a) = \emptyset \iff (x-a) \mid f(x).$$

→ $f(q/b) = 0$ allora $(bx - a) \mid f(x)$

→ un polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ non nullo ha al più tante radici quanto è il suo grado.

→ due polinomi $p(x)$ e $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ di grado n, con n radici uguali, sono UGUALI a meno di un fattore invertibile.

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n $\exists\, p \in \mathbb{N}$ (primo) tc:

- $p \nmid a_n$
- $p \mid a_{n-1}, \dots, p \mid a_0$
- $p^2 \nmid a_0$

il polinomio $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$ con primo p.

ES $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$ è irriducibile: $2 \nmid 3$, $2 \mid 4$, $2 \mid 2$ e $2^2 \nmid 2$

- **Divisione con resto**: Dati due polinomi in $\mathbb{K}[x]$ esistono unici $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tc

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

→ con $r(x) = \emptyset$ o $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$.

SE $LC(f(x)) = 1$ (coefficiente del termine di testa è 1) il polinomio $f(x)$ si dice MONICO.

- **GCD** (massimo comun divisore) di due polinomi è il polinomio monico di grado minore tra quelli che dividono sia $f(x)$ che $g(x)$ [il limite è 1].
→ dato dai fattori comuni presi 1 volta con il minimo esponente.

- **LCM** (minimo comune multiplo) di due polinomi è il polinomio monico di grado maggiore tra quelli che dividono sia $f(x)$ che $g(x)$ [il limite è $f(x) \cdot g(x)$].
→ dato dai fattori comuni, e non, presi 1 volta con il massimo esponente.

- **Algoritmo Euclideo**: Dati $f_0(x), f_1(x) \in \mathbb{K}[x]$, con $\deg f_0(x) \geq \deg f_1(x)$. Sia:

[UTILE X IL TEOREMA DI STURM]

$$f_i(x) = q_i(x) f_{i+1}(x) + f_{i+2}(x)$$

la divisione con resto di $f_i(x)$ rispetto a $f_{i+1}(x)$, per opportuni $q_i(x)$. La sequenza di coppie $(f_i(x), f_{i+1}) \to (f_{i+1}, f_{i+2}(x))$ termina con una coppia $(g(x), \emptyset)$, $\gcd(f_0(x), f_1(x)) = g(x)$.

CONSEGUENZE [dimostrazioni discendono dalle definizioni del gcd]:
- $\gcd(f(x), g(x)) = \gcd(1 \cdot g(x), h(x))$.
- gcd di ogni coppia è lo stesso.
- $\gcd(f(x), g(x), h(x)) = \gcd(\gcd(f(x), g(x)), h(x))$

Dati $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, $a \in \mathbb{K}$, $a \neq \emptyset$ e $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ coprimo con $f(x)$ e $g(x)$:
- $\gcd(f(x), a g(x)) = \gcd(f(x), g(x))$ => posso raccogliere e DIVIDERE per elementi, non nulli del campo a piacere.
- $\gcd(f(x), h(x) g(x)) = \gcd(f(x), g(x))$ => posso ELIMINARE un fattore che sia coprimo con entrambi i polinomi.

Un polinomio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ che abbia fattorizzazione su $\mathbb{K}[x]$ in irriducibili distinti di molteplicità 1 si dice squarefree.

Dato $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$, definiamo la derivata FORMALE di $f(x)$ il polinomio

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

CONSEGUENZE dati $f(x)$ e $g(x) \in \mathbb{K}[x]$:
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\deg f'(x) = \deg f(x) - 1$
- la derivata di una costante è $\emptyset$.

- **Criterio della molteplicità o del gcd**: Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ e una sua fattorizzazione in irriducibili su $\mathbb{K}[x]$:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)^{\alpha_i}$$

1) $\gcd(f(x), f'(x)) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)^{\alpha_i - 1}$
2) $\gcd(f(x), f'(x)) \mid f(x)$.
3) $f(x)$ è squarefree se e solo se $\gcd(f(x), f'(x)) = 1$.
4) il polinomio $\frac{f(x)}{\gcd(f(x), f'(x))}$ è squarefree.

dimostrazioni
regole di derivazione di somma e prodotto.
definizione di gcd.
2 => 3.
3 => 4.

$i^2 = -1$

NUMERI COMPLESSI:

Siano A,B insiemi. Allora l'insieme delle coppie ordinate composte da un elemento di A ed uno di B si dice prodotto cartesiano di A e B.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

PROPRIETÀ: $(a,b) = (c,d) \iff a=c \ \forall \ b=d$

NB. $(A, +_A, \cdot_A)$ e $(B, +_B, \cdot_B)$ sono anelli $\Rightarrow (A \times B, \oplus, \odot)$ è un anello con operazioni ovvie.

Dato un anello A, un suo elemento $a \neq \emptyset$ è detto ZERO DIVISORE se esiste $b \in A, b \neq 0$ tc $a \cdot b = \emptyset$.

Sia A un campo. Se esiste $a \in A$ zero divisore, a non è invertibile $\Rightarrow$ campo non ha zero divisori [dimostrazione X ASSURDO partendo da $a \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$, contraddizione].

L'insieme $R[i] = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ è un campo tc: $a+ib =_{R[i]} \emptyset \iff a=b=0 \iff (a,b)=(0,0)$
[$0 = 0+0i$ è il neutro additivo; $1 = 1+0i$ è il neutro moltiplicativo].

→ l'inverso di $(a+ib)^{-1}$ è $\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \ \forall (a+ib) \neq 0 \in \mathbb{R}$.

- FORMA CARTESIANA: $a+ib$ (due numeri complessi sono uguali se $a=c$ e $b=d$).
- $b=0$, z è detto immaginario puro.
- $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\overline{z} = a-ib$
- FORMA VETTORIALE / TRIGONOMETRICA: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ nel piano di ARGAND-GAUSS; sapendo che $\rho = |z|$, $a = \rho\cos\theta$ e $b = \rho\sin\theta$. (con $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$)
(due numeri complessi sono uguali se sono ambedue nulli o se hanno uguale modulo ed il loro argomento differisce per un multiplo intero di 2π).
- Principio d'identità dei numeri complessi in forma trigonometrica:

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \iff \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}$$

- PROPRIETÀ DEL CONIUGIO: $\overline{a+ib} = a-ib$

✓ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ se $z \neq 0$. ✓ $\overline{z} = z$ se $z \in \mathbb{R}$. ✓ $\overline{z} = -z$ se z è immaginario puro. ✓ $z \cdot \overline{z} = |z^2| \geq 0$ se $z=0$

✓ $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|}$ ✓ $\overline{\overline{z}} = z$

- PROPRIETÀ DEL MODULO:

✓ $|\overline{z}| = |z|$

✓ $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ disuguaglianza triangolare (verificata con la regola del parallelogramma).
↳ $|z_1+z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ [dimostrazione in forma trigonometrica: CAP. 11].

Ricordando che:

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

Dati due complessi in forma trigonometrica, abbiamo che:

① $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$ [per la regola sul seno e coseno dell'angolo somma]

② $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1}(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$ [usando la formula $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$ e le proprietà di sin e cos].

③ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$ [dal punto precedente].

④ $z_1^n = \rho_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))$ [dal primo punto per induzione] FORMULA DI DEMOIVRE.

✗ Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$. Una radice n-esima di w è un complesso z tc $z^n = w$.
L'insieme delle RADICI N-ESIME di w si indica come $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}}$.
Sia w un complesso non nullo e $n \geq 1 \Rightarrow \exists$ n-radici distinte di w.

DIM: Attraverso la formula di Demoivre sappiamo che $z_k^n = w$. Per l'unicità basta applicare il principio d'identità dei numeri complessi in forma trigonometrica:

$r = \sqrt[n]{\rho}$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi$ per un qualche $k \in \mathbb{Z}$.

[✗ ASSURDO] Per dimostrare che sono distinti supponiamo che esistano interi h,k tra $\emptyset$ e n-1 tc $z_h = z_k$. Allora $\frac{\theta+2h\pi}{n}$ e $\frac{\theta+2k\pi}{n}$ differiscono per un multiplo di 2π e deve esistere un $l \in \mathbb{Z}$ tc:

$$\frac{\theta+2h\pi}{n} = \frac{\theta+2k\pi}{n} + 2l\pi \Rightarrow h-k = nl$$

Ciò implica che $(h-k)$ è un multiplo di n, ma questo è IMPOSSIBILE perché h,k sono tra $\emptyset$ e n-1 e la loro differenza è, quindi, strettamente minore di n. □