RACCOLTA DOMANDE D'ESAME & DOMANDE RICEVIMENTO ALGEBRA LINEARE

Anni: 2021-2022 & 2022-2023

In questa dispensa ho voluto riunire tutte le domande fatte a ricevimento e agli esami orali dal prof. Caboara. Ho anche scritto le possibili risposte (x l'esame) e quanto detto dal professore (x i ricevimenti).

Potete trovare tutta la teoria sul sito del Caboara:
[https://people.dm.unipi.it/caboara/AlgebraLineare_ING_Chimica_22_23/dispense.pdf]

In più ho voluto aggiungere un FORMULARIO utile x lo scritto, diviso x capitoli & una raccolta della TEORIA sempre chiesta dal prof. Caboara all'esame orale.

[→ Ho fatto un'altra dispensa con tutti gli esercizi PROPOSTI dal Caboara durante le lezioni, SVOLTI & con un riassunto completo di TUTTA la TEORIA... SE vi interessa.]

Spero vi possa essere di aiuto.

INGEGNERIA CHIMICA

PROFESSORE M. CABOARA

-Alessandra De Antoniis.

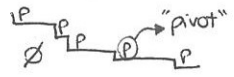
master COPY

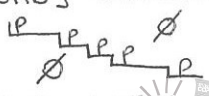
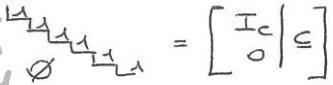
master COPY

RISOLUZIONE GENERICA:

✓ ① Fattorizzazione: - DIVISIONE CON RESTO $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$
- $\Delta<0$ irriducibile, $\Delta=0$ quadrato, $\Delta>0$ formula $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- FATTORIZZAZIONE UNICA
- RUFFINI $g(a)=0 \Leftrightarrow \Delta=0\ (x-a)\mid f(x)$
- TEOREMA DELLE RADICI divisori = $\frac{\text{termine noto}}{\text{termine di testa}}$] $\exists$ Q non su $\mathbb{R}$ (radici razionali)
- CRITERIO DI EISENSTEIN:
$p \nmid a_m \quad p \mid a_{m-1}, \dots, p \mid a_0 \quad p \nmid a_0^2$
es $g(x)=3x^2-4x+2$ è irriducibile su Q per $p=2$.
(x^m-p) con p primo sono irriducibili su Q.
- TEOREMA DEL BINOMIO: $(a+b)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a^i b^{m-i}$ con $\binom{m}{i}=\frac{m!}{k!(m-i)!}$
- GCD di 2 polinomi è il polinomio MONICO di grado MINORE che divide entrambi.
- principio d'identità dei polinomi + STANDARD (raccoglimenti, sostituzioni...)
→ GCD(coprimi) => non vi sono soluzioni comuni. => gcd = 1

② Numeri complessi: - $i \notin \mathbb{R}$ con $i=\sqrt{-1}$
$|e^{i\theta}|=1$ $e^{i\pi}=-1$ quindi $e^{i\frac{\pi}{2}}=1$
- FORMA CARTESIANA: $z=a+ib$ con identità $a=c$ e $b=d$ (se $z_2=c+id$)
- " TRIGONOMETRICA/VETTORIALE: $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow \begin{cases}\rho_1=\rho_2\\ \theta_1=\theta_2+2k\pi\end{cases}$ con $k\in\mathbb{Z}$
- " ESPONENZIALE: $z=\rho e^{i\theta} \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ tc $\begin{cases}\rho_1=\rho_2\\ \theta_1=\theta_2+2k\pi\end{cases}$
(esponenziale: $\cdot$ e $\div$; cartesiana: $+$ e $-$)
=> FORMULA DELLE RADICI in forma esponenziale: $\sqrt[m]{z}_{\mathbb{C}}=\sqrt[m]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}}=\sqrt[m]{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{m}}$ con $k: 0,\dots,m-1$
- PIANO DI ARGAND-GAUSS: le n radici n-esime di un complesso z sono i vertici di un poligono regolare con n lati.
- TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: gli unici polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ sono lineari.
• Formula x trovare i fattori lineari in $\mathbb{C}[x]$ (e polinomio in $\mathbb{R}[x]$) è:
$(x-z_0)(x-\overline{z_0})=x^2-2[\mathrm{Re}(z_0)]x+|z_0|^2$.
• Un polinomio di grado DISPARI ha almeno una radice in $\mathbb{R}[x]$ (reale).
• i soli polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ sono lineari ∅ di grado 2 con $\Delta<0$.

✓ ③ Sistemi lineari: • Due sottinsiemi sono UGUALI SE: sono finiti con stessa cardinalità ed elementi; descrizione cartesiana simile o parametrica.
• le righe della matrice sono $A_1,\dots,A_m$ mentre le colonne sono $A^1,\dots,A^n$
- OPERAZIONI CHE PRODUCONO SISTEMI EQUIVALENTI: scambio di righe, combinazione lineare di righe (o 1 o più oggetti); scambio di colonne
• DUE sistemi lineari sono EQUIVALENTI se le matrici sono equivalenti (e viceversa).
- RIDURRE $[A|\underline{b}]$ con gauss in:
① $[S|b']$ SCALA


② $[St|b']$ STANDARD

(elimino i valori sopra i pivot.)
③ $[N|b']$ NORMALE


(ogni colonna ha un PIVOT => SCAMBIO DI COLONNE)
- COMBINAZIONE LINEARE: $\underline{\lambda}\cdot\underline{v}=\underline{0}$ con $\lambda\in\mathbb{K}^m-\{0\}$ avremo dei vettori linearmente DIPENDENTI.
• $A\underline{x}=\underline{0}$ si dice sistema OMOGENEO e ha sempre la soluzione $\underline{x}=\underline{0}$.
• DUE funzioni sono uguali (principio d'identità) se $\forall x\in A\ f(a)=g(a)$ tc
$f: A\to B,\ a\mapsto f(a)$ e $g: A\to B,\ a\mapsto g(a)$

master COPY

④ Matrici

: - PRODOTTO MATRICIALE $A \in Mat_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $B \in Mat_{m\times k}(\mathbb{K}) \Rightarrow C \in Mat_{n\times k}(\mathbb{K})$
- NILPOTENTE se $\exists k \in \mathbb{N}-\{0\}$ t.c $A^k = \emptyset$.
- TRASPOSTA (A^T) lascia invariata la diagonale e scambia gli elementi sopra di essa con i corrispondenti elementi al di sotto, tra le proprietà:

$(A^T)^T = A$ e $(tA)^T = tA^T$ ⊕ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-1}$

- INVERSA a destra se $A \cdot X = I_m$ (a sinistra se $X \cdot A = I_m$)
⊕ se esistono entrambe (in una matrice quadrata e sono uguali ∃ inversa, ed è unica).

condizione necessaria x matrice invertibile : $\in \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Determinante : - LAPLACE, SARRUS, GAUSS
- TEOREMA DI BINET : $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
• $\det(0_m) = 0$ e $\det(I_m) = 1$ ⊕ $\det(A^T) = \det(A)$ ⊕ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
⊕ RIGA o COLONNA NULLA $\Rightarrow \det(A) = \emptyset$
- OPERAZIONI DI GAUSS EQUIVALENTI: moltiplicazione riga/colonna per uno scalare, scambio di righe/colonne; riduzione con Gauss

(se) $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ ⊕ condizione INVERTIBILITÀ : $\det(A) \neq \emptyset$ ⊕ matrice □ a blocchi : $\det M = \det A \cdot \det C$

Rango (indifferente se x RIGHE o COLONNE) : - $0 \leq rk(A) \leq \min(n,m)$ con $rk(A) = 0 \leftrightarrow$ tutte le entrate di A sono nulle.
- $rk(A)$ = numero righe/colonne linearmente indipendenti (⊕ PIVOT)
- OPERAZIONI EQUIVALENTI : riduzione con Gauss
⊕ COMBINAZIONE LINEARE mi dice quali vettori sono l.indipendenti (cioè quelle righe che non si sono ridotte a $\emptyset$) $\Rightarrow \det(A) \neq \emptyset$.
- TEOREMA ORLATI: trovando una sottomatrice non singolare di ordine $n \Rightarrow rk(A) = n$ se tutte le sottomatrici sono singolari.
- TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI:
• $rk([A|b]) \neq rk(A)$ il sistema non ha soluzioni.
• $rk([A|b]) = rk(A)$ il sistema ha $\infty^{m-rk(A)}$ soluzioni.
• il sistema $Ax = b$ ha soluzione UNICA se $rk([A|b]) = rk(A) = m$.
- TEOREMA DI CRAMER: $x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$
- FORMULA INVERSA: (metodo dell'aggiunta della matrice identità o)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{\det(A)} \cdot [(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}]_{ij}$$ (cioè Laplace + Trasposta)

⊕ metodo tags variable di Gauss x trovare le relazione (COMBINAZIONI LINEARI).
$\Rightarrow$ riga si riduce a zero essa è potenzialmente combinazione lineare delle precedenti.

! SCAMBIO DI RIGHE $\Rightarrow$ cambio di segno al determinante.

---

⑤ Spazio vettoriale

(indifferente se per RIGHE o COLONNE) : ogni retta passante per l'origine è un sotto spazio di $\mathbb{R}^2$ / piano di $\mathbb{R}^3$.
• vettore generico $\Rightarrow$ descrizione parametrica.
- BASE se $\underline{v}$ genera il $\mathbb{K}$-spazio e sono l.indipendenti.
• $\underline{\lambda} \cdot \underline{v} = \underline{w}$ si dicono COORDINATE di $\underline{w}$ secondo la base B, $\underline{w} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)_B$
$\Rightarrow$ sistema minimale e massimale.
- TEOREMA DEL COMPLETAMENTO
- DIMENSIONE : # variabili − # condizioni indipendenti, per cui $\dim \mathbb{K}^m = m$, $\dim \mathbb{K}[x]_d = d+1$ e $\dim Mat_{n\times m}(\mathbb{K}) = n \cdot m$.
se $\mathbb{K}$-spazio ammette sistema finito di generatori $\Rightarrow$ ammette base e ha dim. finita.
- RAPPRESENTAZIONE UNICA : $\underline{\lambda} \cdot \underline{v} = \underline{v}$ ⊕ le coordinate sono uniche fissata una base. Rispetto a basi differenti un vettore può avere coordinate differenti.
• se $W \subseteq_{sse} V$ avremo W dimensione finita e $\dim W \leq \dim V$ o $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$.

! se A, B sono basi di V, W non necessariamente $A \cup B$ è base di $(V+W)$.
⊕ non è sempre possibile trovare una base dell'INTERSEZIONE riducendo la matrice x RIGHE.
- BASE NAIF : metodo dell'uguaglianza GENERICA (o dei vettori generici)
- FORMULA GRASSMAN: $\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$ (⊕ metodo del RANGO)
• somma diretta: vettori l.indipendenti con scrittura UNICA.
(SOMMA: parametrica, INTERSEZIONE: cartesiana) se $V \cap W \neq \{0\}$ la somma non può essere diretta.
- Descrizione cartesiana (sistema lineare) $\Rightarrow$ condizioni di un vettore $\underline{v} \in V$ $\mathbb{K}$-spazio.

master COPY COPISTERIA

⑥ Morfismi
(o Applicazioni lineari)

: - DEFINIZIONE di LINEARITÀ:
- $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ abbiamo $F(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = F(\underline{v}_1)+F(\underline{v}_2)$ additività
- $\forall \underline{v} \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ abbiamo $f(\lambda \underline{v}) = \lambda F(\underline{v})$ omogeneità

(25) funzione coordinate, nulla, identità, (uguale x scalare), funzioni omogenee, prodotto scalare, derivata.

- DUE funzioni lineari che assumono gli stessi valori su una base del dominio sono uguali come funzioni.
- $A = B \iff \mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B$

- IMMAGINE $Im(T)$ = spazio generato dalle colonne di A => Base sono le colonne L.indipendenti
  - con $T: V \to W$ (morfismo) e $A = M_T$ (cioè A colonne e T righe)
  - ⊕ $\dim Im(T) = rk(A)$
- NUCLEO $Ker(T)$ = soluzioni del sistema omogeneo associato ad A [$Sol(Ax=0)$] Base del $Ker(T)$
  - ⊕ $\dim Ker(T) = n - rk(A)$ con $n = \dim V$ = # incognite.

! $\underline{v} \in Im(T)$ se il sistema $[A|\underline{v}]$ ha soluzione, cioè $rk(A|\underline{w}) = rk(A)$.

- INIETTIVITÀ $\Rightarrow \dim Ker(T) = 0$, cioè $Ker(T) = \{\underline{0}\}$ insieme nullo. } BIETTIVA => invertibile
- SURIETTIVITÀ $\Rightarrow \dim Im(T) = \dim(W)$, cioè $Im(T) = W$ }

- UN MORFISMO T conserva le relazioni lineari tra gli elementi del dominio, e non ne aggiunge se è iniettivo.

! l'immagine secondo T di una base di V non è base di $Im(T)$.

- TEOREMA DELLA DIMENSIONE: $\dim V = \dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim Ker(T) + rk(T)$
- TEOREMA ROUCHÉ-CAPELLI: $\dim Sol(Ax=0) = \dim Ker A = n - rk(A)$ — aggiunta —

- $T: V \to V$ è un ENDOMORFISMO.
- SE ∃ morfismo bigettivo (cioè invertibile) allora $T: V \to W$ ISOMORFISMO ($V \cong W$).

⇒ inverso di un morfismo è un morfismo.

(DUE spazi isomorfi sono lo stesso spazio a meno dei nomi che diamo agli oggetti.)

- $T: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^{nm}$ allora che è iniettiva se $m = \dim V = rk(T)$ ed è surgettiva se $rk(A) = n$ (con A matrice associata al morfismo)

(MUST COLONNE)

- CAMBIO BASE: $M^{B}_{B'} \cdot \underline{w}_B = \underline{w}'_B$ (VETTORI) e $(M_T)^{C}_{C} = M^{C}_{B} \cdot (M_T)^{B}_{B} \cdot M^{C}_{B}$ (MORFISMI).
- (25) $M^{B}_{\mathcal{E}_3}$ ha come colonne i vettori della base B espressi in coordinate di $\mathcal{E}_3$ (righe).

! SE i componenti del vettore immagine sono polinomi omogenei di grado 1, f è lineare (morfismo di $\mathbb{R}$-spazi)

⊕ $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \Rightarrow (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$ è AUTOVETTORE di T.

⑦ Autovettori

- MATRICI SIMILI ($A \sim B$) se $X \cdot A = B \cdot X$ allora che: $\det(A) = \det(B)$, $rk(A) = rk(B)$ e $\dim Ker(A) = \dim Ker(B)$. ⊕ autovalori ($P_T(\lambda)$) e traccia.
- DUE matrici simili danno lo stesso morfismo rispetto a basi diverse.
- MORFISMO è SINGOLARE solo se $Ker(T) \neq \{\underline{0}\}$

- AUTOVETTORE $\boxed{T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}} \Rightarrow [(M_T)^{B}_{B} - \lambda Im](\underline{v}) = \underline{0}$ con autovalore λ, nel autospazio $V_\lambda = Ker[(M_T)^{B}_{B} - \lambda Im]$, dove $\dim(V_\lambda) = \dim(T)$ con T endomorfismo.

! se $\det(T) = 0$ allora che il termine noto del polinomio caratteristico $P_T(\lambda)$ e di quello minimo PM_T è zero (TERMINE NOTO $\equiv \det(M_T)^{B}_{B}$).

- $P_T(\lambda)$ coefficiente direttivo (di testa) è $(-1)^m$ mentre il coefficiente di λ^{m-1} è $(-1)^{m-1} \cdot tr(M_T)^{B}_{B}$.
  (ultimo termine; primo termine; secondo termine)

  traccia: somma degli elementi sulla diagonale (MATRICI □).

$P_T(\lambda) = \det[(M_T)^{B}_{B} - \lambda Im]$ dove il # autovalori $\leq$ # deg $P_T(\lambda) = \dim V$

! RIDURRE CON GAUSS E POI CALCOLARE IL DETERMINANTE DI $(A - \lambda Im)$ È ERRORE GRAVE. !

- $\lambda = 0$ è autovalore solo se T è singolare ⊕ $Im = (M^{C}_{B})^{-1} \cdot M^{C}_{B}$
- molteplicità geometrica: $mg = n - rk[(M_T)^{B}_{B} - \lambda Im]$ ⊕ unione di autospazi dà una base di V e T è diagonalizzabile

=> DIAGONALIZZABILITÀ: - n autovalori DISTINTI.
- $ma = mg$ [dove $ma \geq mg$ sempre]
- se il PM_T ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e NON ha radici multiple, cioè è squarefree.

- polinomio MINIMO PM_T è il polinomio minimo positivo (MONICO) che divide tutti gli elementi di I_A ⊕ stessi fattori irriducibili di $P_T(\lambda)$ con grado ($\leq$).

! matrice simmetrica => diagonalizzabile ⊕ invertibilità ⇔ diagonalizzabilità