NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$

Introdotti per risolvere equazioni del tipo: $x^2+1=0$

$i=\sqrt{-1}$

Sono definiti numeri complessi:

$\mathbb{C}=\{a+ib \mid a;b \in \mathbb{R}\}$ con $\begin{cases} a: \text{parte reale} \\ ib: \text{parte immaginaria} \end{cases}$

Si ha che: (se e solo se)

$a+ib=c+id \iff a=c \text{ e } b=d$

Nell'insieme dei numeri complessi sono definite le operazioni $+;-;*$, potenza intera, $\sqrt{}$ (altre più avanti).

• L'INVERSO DI UN NUMERO COMPLESSO

Def: Dato $a+ib \in \mathbb{C}^*$ (cioè 0 escluso), si dice INVERSO di $a+ib$ il numero $c+id \in \mathbb{C}$ t.c. $(a+ib)(c+id)=1$

Si ha quindi che $c+id=\frac{1}{a+ib}$ $\left(o\ (a+ib)^{-1}\right)$.

Voglio dimostrare che:

$\forall a;b \in \mathbb{R}$ $\exists\ x;y \in \mathbb{R}$ t.c. $(a+ib)(x+iy)=1$

$a+ib \in \mathbb{C}^*$ $\quad x+iy \in \mathbb{C}^*$

$ax+iay+ibx-by=1 \qquad ax-by+i(ay+bx)=1$

Per il principio di uguaglianza di 2 numeri complessi ~~si ha che~~: deve essere che:

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$$

Escludendo il caso particolare $b=0$ (in questo caso l'inverso del numero è $\frac{1}{a}$), divido per b:

$$\begin{cases} bx = -ay \\ ax - by = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{a}{b}y \\ ax - by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{b}y \\ a\cdot\left(-\frac{a}{b}y\right) - by = 1 \end{cases}$$

$$-\frac{a^2}{b}y - by = 1$$

$$-a^2y - b^2y = b$$

$$a^2y + b^2y = -b$$

$$y = \frac{-b}{(a^2+b^2)} \quad (a^2+b^2 \neq 0 \text{ perché i 2 numeri non sono mai entrambi nulli per ipotesi})$$

$$x = -\frac{a}{b}\cdot y = \frac{a}{a^2+b^2}$$

quindi $\frac{1}{a+ib} = x+iy = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

L'inverso di un complesso è un numero complesso.

ALTRA POSSIBILE DIMOSTRAZIONE:

Per scomporre a^2+b^2:

$$a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \qquad \frac{\text{coniugato}}{(\text{modulo})^2}$$

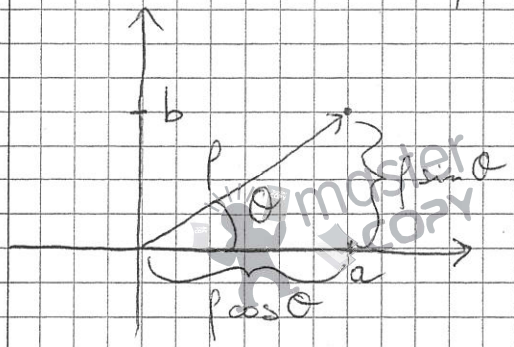
- ALTRI MODI DI SCRIVERE I NUMERI COMPLESSI

Definisco la funzione φ tale che:

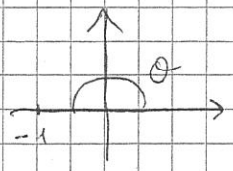
$a+ib \longrightarrow a;b$ Corrispondenza biunivoca: ad ogni numero complesso corrisponde uno ed uno

$\mathbb{C} \qquad\qquad \mathbb{R}^2$

solo coppia di numeri reali (per la definizione di uguaglianza di 2 numeri complessi)



Inoltre $-1 = e^{i\pi}$



Si ha quindi $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$ (perché $\text{tg}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$)

Posso definire ogni punto con distanza dal centro (ρ) e angolo (θ)

(ρ è sempre >0 e $0 < \theta \leq 2\pi$)

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times [0;\, 2\pi)$$

$$a+ib \qquad a;b \qquad \sqrt{a^2+b^2}\,;\ \text{arctg}\,\frac{b}{a}$$

$\rho \rightarrow$ modulo

$\theta \rightarrow$ argomento

Inoltre: $a;b = \rho\cos\theta;\ \rho\sin\theta$

L'unica situazione da escludere è se $\rho = 0$, perché in tal caso θ non è definibile.

Due numeri complessi sono uguali se:

$\rho' = \rho \qquad \theta' = \theta + 2k\pi$

$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$

Dati 2 numeri complessi:
$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$
Il prodotto è molto semplice (formula di addizione):
$\rho\rho'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$

→ Quindi per fare il prodotto si moltiplicano i moduli e si sommano gli argomenti.
Questo si dimostra anche con le potenze:
$(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

Inoltre:
$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} \cdot (\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta'))$
(si dimostra con formule di sottrazione e def. inverso).

→ $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si può scrivere anche:
$\rho e^{i\theta}$ $\quad \rho e^{i\theta} \cdot \rho e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

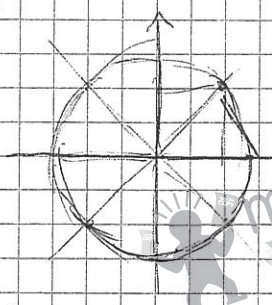
• **RADICE DI UN NUMERO COMPLESSO**

Def: dati $z \in \mathbb{C}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, si dice radice n-esima di z un numero w t.c. $w^n = z$.

→ **TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA:**
Dato $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ (quindi un polinomio a coeff. complessi), l'equazione $f(x) = 0$ ha n radici, con n = grado del polinomio. Queste radici non sono necessariamente tutte diverse tra loro.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}} \text{ con } k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Con altri k ~~intieri~~ ottengo gli stessi risultati.
Queste soluzioni sono rappresentabili in un piano cartesiano.



Sono iscritte in un cerchio di $r = \rho$ e si possono trovare per simmetria (rispetto ad assi e bisettrici?) (*)

Il CAMPO dei numeri complessi

Un insieme è un CAMPO quando le operazioni di somma e prodotto si risolvono all'interno dell'insieme stesso, con i loro elementi neutri (1: elemento neutro moltiplicativo; 0: elemento neutro additivo), gli inversi additivi e moltiplicativi e proprietà come la distributiva: $a(b+c) = ab + ac$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{a, b \mid a \in \mathbb{R}\}$

Non è un campo se si definisce la moltiplicazione perché così:

$(a;b) \cdot (c;d) = (ac; bd)$

Esistono infatti 0 e 1 tali che:

$(0;1)(1;0) = (0;0)$; ~~non esiste~~

$\neq 0 \quad \neq 0$

tale che $(1;0)(x;y) = (1;1)$, quindi non esiste l'inverso moltiplicativo.

I numeri complessi invece sono un campo: