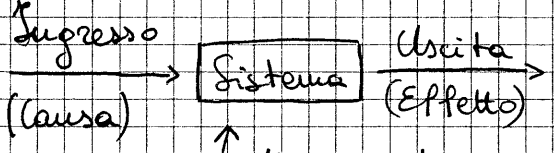
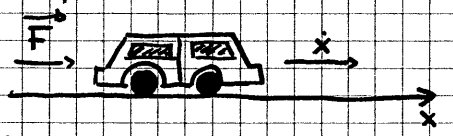
CONTROLLI AUTOMATICI ①

Teoria dei Sistemi:



↑ dinamica | rappresentato da un'equazione differenziale.

Esempio: Automobile;



$\vec{F}$ causa

$\dot{\vec{x}}$ effetto

Dinamica per il centro di massa per l'auto:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{F} = m \cdot \ddot{x}$ eq. diff del II° ordine a variabili separabili.

$x_1 = x$

$x_2 = \dot{x}_1 = (v) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \vec{F} \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

Problemi di Cauchy ⇒

⇒ ho bisogno delle condizioni iniziali: t_0, v_0 e x_0.

L'informazione o l'insieme delle informazioni tali che a partire da un t_0 è possibile determinare l'andamento del sistema per ogni $t \geq t_0$, cioè lo **stato del sistema**; manca però ancora l'ingresso. Lo stato è infatti funzione dell'ingresso e dell'andamento del sistemi.

Devo poter prevedere l'andamento futuro del sistema.

Ingressi: $u(t) \in \mathbb{R}^m$

Sistema: $x(t) \in \mathbb{R}^n$

Uscite: $y(t) \in \mathbb{R}^p$

Varrà $\dot{x}(t) = f(x(t); x(t_0); u(t))$ Equazione di Stato

$y(t) = g(x(t); t; u(t))$ Equazione di Uscita

Se $y(t)$ non è $f(u(t))$, cioè NON dipende da $u(t)$, il sistema si dice **proprio** o **causale**.

$y(t) = Ku$ con K costante.
↑ effetto e causa sono contemporanei

Se $y(t)$ NON dipende da t, il sistema si dice **stazionario**.
Non importa quindi conoscere t_0, lo si assume quindi 0.

Se f e g sono lineari di x e u, cioè del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\cdot x(t) + B(t)u(t) \\ y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

con A, B, C, D matrici quadrate

(A, B, C NON dipendenti da t ⇒ lineare tempo invariante LTI)

Il sistema si dice **lineare**.

Causalità stretta, stazionarietà e linearità sono proprietà INDIPENDENTI. Se A, B, C e D non dipendono da t, il sistema è lineare e stazionario. Se $D = 0$, il sistema è strettamente causale.
In natura i sistemi NON sono lineari e stazionari ma sono strettamente causali. Assumeremo invece sistemi lineari, stazionari e strettamente causali, questo per analizzare i casi generali.

Sistemi LTI (lineari tempo-invariati).

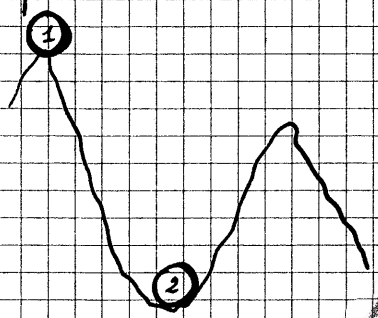
Caso generale

Punti di equilibrio: Uno stato x_0 si dice di equilibrio rispetto ad un ingresso $u_0(t)$ se $\dot{x}(t) = f(x(t), x_0(t) = x_0, u_0(t)) = 0$ $\forall t \geq t_0$

$x(t) = x(0) \quad \forall t \geq t_0$

Possono essere diversi con lo stesso ingresso o a causa di ingressi diversi; esistono sistemi che non hanno stati di equilibrio.

esempio:



Entrambi di equilibrio, ma sono molto diversi fra loro:

Stabilità: Dato x stazionario per cui $x=0$ è stato di equilibrio per ingresso nullo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x} = f(x(t); x(0) = x_0; u(t)) = 0$

Se $x=0$ è stato di equilibrio $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x(t), 0, 0) = \phi(0) = 0$, l'origine si dice stato di equilibrio stabile se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x(0) - 0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x(t) - 0| < \varepsilon \Rightarrow$

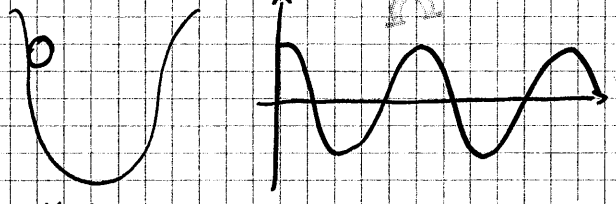
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; t.c. \; |x(0)| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon$ ← nell'origine

Mentre se sposto 1 di uno spostamento arbitrariamente piccolo, δ_ε, si allontanerà dalla posizione iniziale di un valore consistente, se sposto 2 dello stesso valore, non accadrà lo stesso. Al contrario $\forall \varepsilon > 0$ potrò avere uno spostamento $\delta_\varepsilon < \varepsilon$.

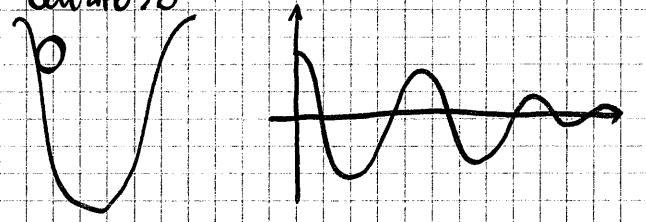
Equivalenza asintotica:

Mentre nel primo caso l'oscillazione resta contenuta ma non si ferma, nel secondo tende a rimettersi nella posizione di partenza. Il secondo caso si definisce punto di equilibrio stabile asintoticamente.

attrito = 0



attrito > 0



Definizioni di Ljapunov: Riguardano sia lo stato che le perturbazioni di un sistema; vale quindi $u \neq 0$, che può comunque mettere un sistema in equilibrio.

Dinamica nell'intorno dei punti di equilibrio:

Scriviamo le equazioni lineari utilizzando poi le formule di Taylor per $X \to X_0$:

$f(x)$ con $f(X_0) = f_0$ $\quad \delta_x = X - X_0$

$$g(x) = f_0 + \frac{df_0}{dx} \cdot \delta_x + \frac{d^2 f_0}{d^2 x} \cdot dx^2$$

N.B. $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\tilde{x}(t)}_{\text{vettore n-dim.}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ è matrice $n \times n$ (Jacobiana).

Assumendo $X_0 = 0$:

$\delta_x = X(t) - 0 = X(t)$

$\delta_u = u(t) - 0 = u(t)$ (assumiamo $u^* = 0$ per comodità)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X, u) = f(0, u^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0 \\ u=u^*}} \cdot X(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=0 \\ u=u^*}} \underbrace{\delta_{\tilde{u}(t)}}_{\text{vettore m-dim}} \\ u^* = 0 \end{cases}$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|$ ↑ matrice J di $n \times m$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{X}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0 \\ u=0}} X(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=0 \\ u=0}} \cdot u(t)} \Rightarrow$$

linearizzazione attorno a 0 punto di eq.

$\Vert$

FORMA STANDARD

Approssima i punti reali nell'intorno di un punto di equilibrio ed è un sistema lineare.

$\wedge$

derivata di f definita tale che $\dot{x}(t) = f(x, u)$

Analisi delle matrici di un sistema lineare:

$\dot{x} = A\underline{x} + B\underline{u}$ $\quad$ A $n \times n$

$\dot{x} = f(\underline{x}, \underline{u})$ $\quad$ B $n \times m$ $\}$ diverse $\forall$ punto di equilibrio

con x, u vettori tali che: $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$

$f \in \mathbb{R}^n$ $\quad u = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$

$\| \quad \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ \vdots \\ f_n(x,u) \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dobbiamo però considerare anche l'equazione di uscita:

$y(t) = g(x(t), u(t))$ con $\left.\begin{matrix} x=0 \\ u=0 \end{matrix}\right\}$ punto di equilibrio.

$\Downarrow$

$$y(t) = \underbrace{g(0,0)}_{} + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} x(t) + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} u(t)$$

non è detto che sia nullo.

~~Punto di cont~~

Vale infatti che se $g(0,0) \neq 0$, il sistema ha un'uscita costante; $y(t) - g(0)$ = scostamento rispetto all'uscita di equilibrio (spesso si assume nullo).

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ con C e D matrici Jacobiane.

equazione standard di uscita

serve a non escludere un uscita diretta nonché relazione algebrica con l'ingresso.

Analisi II: composta con le derivate n-esime x ogni coord.

Quindi in generale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & (1) \\ y(t) = Cx(t) + \cancel{Du(t)} & (2) \end{cases}$$

Spesso 0 sistema proprio.

A $n \times n$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

B $n \times m$ $\quad u \in \mathbb{R}^m$

C $p \times n$ $\quad y \in \mathbb{R}^p$

Ricordandoci che 1 è una differenziale, quindi necessita di una coppia che ci dà una condizione iniziale

$x(t_0) = x^*$

$u(t_0) = u^*$ $\rightarrow$ oppure