1

TEORIA CONTROLLI AUTOMATICI

COSE TONDA MENTALI

INGRESSO: $u(t)$, cause esterne agenti sul sistema

USCITA: $y(t)$, rivelazione del funzionamento di un sistema

SISTEMA STAZIONARIO: sistema dove l'uscita è la stessa indipendentemente dal tempo

SISTEMA LINEARE: sistema nel quale vale il principio di sovrapposizione degli effetti

STATI DEL SISTEMA: insieme di variabili interne al sistema che ne descrive la dinamica

SISTEMI LTI (LIN. TEMPOINV.): eq. DI STATO: $\dot{x} = Ax + Bu$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

eq. DI USCITA: $y = Cy + Du$ con $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

SISTEMA PROPRIO: sistema dove compare $u(t)$ nell'eq. di uscita

SISTEMA STRETTAMENTE PROPRIO: sist dove non compare $u(t)$ nell'eq. di uscita

STATO di EQUILIBRIO: $\bar{x}$ è S.D.E. per l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$, se $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

STABILE: uno S.D.E si dice stabile se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \|x_0\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \ \forall t \geq t_0$

(se il sistema parte in cond. INIZIALE in δ_ε allora la sua traiettoria si mantiene in un intorno di raggio $\varepsilon \ \forall \varepsilon$)

ASINTOTICAMENTE STABILE: se è stabile e $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}$ $\|x(t)\| \to 0$ (?)

CONSIDERAZIONI SU STABILITÀ NEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI:

- l'origine è sempre punto di eq. per ingresso nullo
  se l'origine è stabile, allora è stabile qualsiasi altro punto di eq. SI PARLA => DI STAB. DEL SIST.
- se $x \in \ker(A)$ allora x è stato di eq. $\dot{x} = 0 \Rightarrow Ax = 0$
- LA STABILITÀ DIPENDE SOLO DALLA RISPOSTA LIBERA DEL SISTEMA!

  $\dot{x} = Ax + Bu$ con $u = 0$, $x(0) = x_0 \rightarrow$ ho $x(t) = e^{At} x_0$ (RISP. LIBERA SIST.)

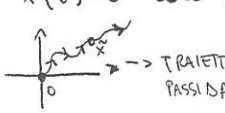
IN CONCLUSIONE (SU STABILITÀ)

- La stabilità dipende solamente dai modi propri del sistema
- Se ho autovalori a $Re < 0$ -> SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE
- Se ho TUTTI autovalori a $Re \leq 0$ e se TUTTI $Re = 0$ MOLT = 1 e $\nu = K$ -> SISTEMA STABILE
- Se esiste un solo autovalore con $Re > 0$ ALLORA IL SIST. È INSTABILE

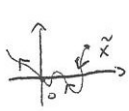
STATO RAGGIUNGIBILE: se $\exists$ un segnale d'ingresso u capace di portare la traiettoria del sistema dallo stato zero a X in un tempo finito (X si dice RAGG.)

STATO CONTROLLABILE (CONTROLLABILITÀ): uno stato $\tilde{x}$ si dice CONTROLLABILE A ZERO, se partendo dalle condizioni iniziale $\tilde{x}$ $\exists$ un ingresso $u(t)$, $\exists \bar{t}$ finito t.c.

$x(\bar{t}) = 0$ con $\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\tilde{u}(t) \\ x(0) = \tilde{x} \end{cases}$



-> TRAIETTORIA FORZATA AFFINCHÈ PASSI DA $\tilde{x}$ => $\tilde{x}$ RAGG.



-> TRAIETTORIA FORZATA AFFINCHÈ PASSI DA $\tilde{x}$ => $\tilde{x}$ È CONTROLLABILE

STATO OSSERVABILE: uno stato x si dice osservabile se è possibile determinare X sulla base delle uscite y. (un sist è oss. se tutti gli stati sono oss.). L'osservabilità è legata alla proprietà della risp. libera e dall'eq. di uscita

master COPY COPISTERIA

STABILITÁ IN X=0

→ **Se A é DIAGONALE**: $x=0$ instabile se $\exists i : \lambda_i > 0$
$x=0$ stabile e asintoticamente stabile se $\forall i, \lambda_i < 0$

→ **Se A é DIAGONALIZZABILE**: (mol alg ν_i = mol geom N_i):
$x=0$ INSTABILE se $\exists i : \lambda_i > 0$
$x=0$ stabile se $\exists K : \lambda_K = 0$ e $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ con $i \neq K$, $\lambda_i < 0$
$x=0$ ASINTOTICAMENTE STABILE se $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ $\lambda_i < 0$

→ **Se A NON È DIAGONALIZZ**: devo riportarmi alla regola generale

EVOLUZIONE LIBERA (IN GENERALE): $x(t) = e^{At}x_0$ ($u(t)=0, t_0=0, x(0)=x_0$ e $x=0$ è stato di eq)

$\lambda_1, \dots, \lambda_K$ sono autovalori distinti di A con ν_i e N_i. se $\lambda_i \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_i = \sigma \pm j\omega$.
MODI PROPRI DEL SISTEMA sono le funzioni del tempo che compaiono negli elementi di e^{At}, che definiscono l'andamento del sistema stesso. Gli elementi di e^{At} ($[e^{At}_{ij}]$) sono combinazioni lineari delle $f(t)$:

1) $e^{\lambda_h t}$ se $\lambda_h \in \mathbb{R}$
2) $t e^{\lambda_h t}, \dots, \frac{t^{\mu_h}}{\mu_h!} e^{\lambda_h t}$ se $\nu_h > N_h$, con $\mu \leq \nu_h - N_h$
3) $e^{\sigma t}(\sin(\omega t + \varphi))$ se $\lambda_{ij} = \sigma \pm j\omega$
4) $t e^{\sigma t}(\sin(\omega t+\varphi)), \dots, \frac{t^{\mu_h}}{\mu_h!} e^{\sigma t}(\sin(\omega t+\varphi))$ se $\nu_h > N_h$, $\lambda_{ij} = \sigma \pm j\omega$, $\mu \leq \nu_h - N_h$ → NELL'ORIGINE

$\Rightarrow$ se tutti gli autovalori λ_i hanno $Re(\lambda_i) < 0 \Rightarrow x=0$ é s.d.e **ASINTOT. STAB.**
$\Rightarrow$ Se $\exists i$: $Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow \exists$ un modo illimitato $\Rightarrow x=0$ é s.d.e **INSTABILE**
$\Rightarrow$ Se $\forall i, Re(\lambda_i) \leq 0$ e $\exists K : Re(\lambda_K) = 0 \Rightarrow$ se $\nu_h \neq N_h$, $x=0$ é s.d.e **INSTABILE**
↳ se INVECE $\nu_h = N_h$, $x=0$ s.d.e. **STABILE** (non ASINT.)

NEI SISTEMI LTI LA STABILITÁ DELL'ORIGINE COINCIDE CON LA STABILITÁ DEL SISTEMA

EVOLUZIONE FORZATA: $x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot b\, u(\tau) d\tau$ con $x_0 = 0$, dove $\dot{x} = Ax + Bu, t_0 = 0, x(0) = x_0$ SISTEMI SISO

DEVO DEFINIRE NUOVE FUNZIONI

→ **GRADINO** $1(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ → derivando ottengo impulso di DIRAC $= \frac{d\,1(t)}{dt} = \delta(t)$
in particolare $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$

→ **RAMPA** $t = \int_{-\infty}^{t} 1(t)\,dt = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$

→ **PARABOLA** $\frac{t^2}{2} = \int_{-\infty}^{t} t\,dt = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \end{cases}$

l'uscita é definita come $y(t) = cx(t) = c^T \int_0^t e^{A(t-\tau)} b\, u(\tau) d\tau = h(t) \overset{\text{CONVOLUZIONE}}{*} u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$
l'eq. diff. associata a questi sistemi necessitano della trasformata di LAPLACE che si basa sul definire l'operatore derivata come $\frac{d}{dt} = s$

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE: se $\exists \lim_{t \to 0^+} f(t) = \bar{c} : F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ALLORA $\lim_{s \to +\infty} sF(s) = \bar{c}$

TEOREMA DEL VALORE FINALE: se $\exists \lim_{t \to +\infty} f(t) = \bar{c} : F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ALLORA $\lim_{s \to 0} sF(s) = \bar{c}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO: $G(s) = c^T(sId_{(n)} - A)^{-1} b$ caratterizzata dal punto di vista dinamico del sistema se si trasforma $y(t)$ ingresso: $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = G(s)U(s)$ $G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ se $h(t)$ = risp a $\delta(t)$

POLI DEL SISTEMA: singolarità polari di $G(s)$, sono un sottoinsieme della matrice A

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

2

STABILITÀ INGRESSO/USCITA - BIBO: un sistema è stabile BIBO $\Leftrightarrow$ a qualunque ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata. Nei sistemi SISO la relazione IN/OUT è data da $G(s)$. Se p_j = POLI DEL SISTEMI, z_i = ZERI del SISTEMA

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

- $\rightarrow$ se tutti i p_j hanno $Re(p_j)<0 \Rightarrow$ il SIST. è BIBO STABILE
- $\rightarrow$ Se $\exists k : Re(p_k) > 0 \Rightarrow$ il SISTEMA è INSTABILE BIBO
- $\rightarrow$ Se $\exists k : Re(p_k) = 0 \Rightarrow$ se $\nu_k > 1 \Rightarrow$ IL SIST. È INSTABILE BIBO

STABILITÀ INTERNA $\dot{x} = Ax$ | **STABILITÀ BIBO** $Y(s) = G(s)U(s)$

- ASINTOTICAMENTE STABILE $\Leftrightarrow Re(\lambda)<0 \Rightarrow$ STAB. BIBO
- STABILE $\Leftrightarrow Re(\lambda)<0$ ma $=$ avg $\not\Rightarrow$ NON CONCLUDO; $\not\Leftarrow$ ST. BIBO
- INSTABILE $\Leftrightarrow \exists Re(\lambda) > 0 \not\Rightarrow$ NON CONCLUDO; $\not\Leftarrow$ ST. BIBO

QUINDI: - relazione ingresso-uscita $\Rightarrow$ dipende solo da $G(s)$ o dalla risposta RISP. ALL'IMPULSO $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
- dinamica interna al sistema $\Rightarrow$ dipende dalle equazioni di stato $\dot{x}(t) = \ldots$, $y(t) = \ldots$

REGIME: $\lim_{t\to\infty} y(t)$. se il lim è FINITO il sistema è in RISONANZA

TRANSITORIO: l'asso di tempo nel quale $y(t)$ ha un comportamento variabile prima di arrivare a regime se c'è, o in RISONANZA

POLI DOMINANTI: sono i poli più lenti del sistema, che definiscono quasi completamente il TRANSITORIO

RISPOSTA AL GRADINO $1(t)$:

indici di qualità:
- Valore di regime: $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$
- Valore massimo: $y_{MAX} = MAX(y(t))$
- Sovraelongazione MAX %: se $\exists y_{MAX} \Rightarrow S\% = \frac{y_{MAX} - y_\infty}{y_\infty}$
- t di max SOVRAELONGAZIONE: $t_{MAX} = t : y(t) = y_{MAX}$ per la prima volta
- t di salita $= t_s$: $y(t)$ passa per la prima volta da 10% al 90% del regime
- t di ritardo $= t_R$: $y(t) = 50\% y_\infty$ per la prima volta
- t di ASSESTAMENTO: t_{a_ε} = MINORE TEMPO NECESSARIO finché $|y(t) - y_\infty| \in [(1-0{,}01\varepsilon)\ldots(1+0{,}01\varepsilon)]\, y(\infty)$

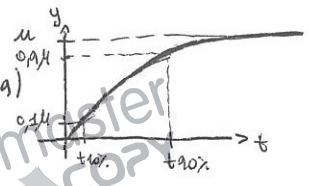
RISPOSTA AL GRADINO SISTEMI I ORDINE

$G_I(s) = \frac{\mu}{1+s\tau}$ dato che $U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$y_{MAX} = \nexists$ $S\% = \nexists$ $t_{MAX} = \nexists$ $y_\infty = \mu$ $t_{SALITA} = \tau(-\ln 0{,}1 - \ln 0{,}9)$

$t_{RITARDO} = 0{,}7\tau$ $t_{ASS} = -\tau \ln(0{,}01\varepsilon)$

t_{ASS} GRANDE $\Rightarrow$ SIST. LENTO



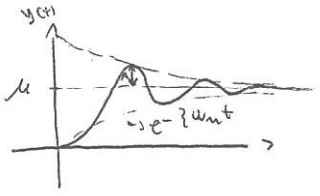
RISPOSTA AL GRADINO SISTEMI II ORDINE

$$G_{II}(s) = \frac{\mu}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \arccos\xi\right)\right)$$

$\arccos\xi = \varphi = \text{FASE} = \arctan\frac{y}{x}$ $\quad -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$y_{MAX} = \mu\left(1 - e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$ $\quad S\% = 100\, e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ $\quad y_\infty = \mu$

$t_{SALITA} \cong 2{,}2 \cdot \frac{1}{\xi\omega_n}$ $\quad t_{ASS} \leq t_{ASS\,I} \Rightarrow t_{ASS\,II} = \frac{1}{\xi\omega_n}\ln(0{,}01\varepsilon)$

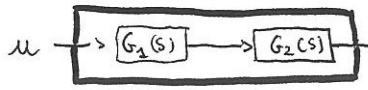


RISPOSTA IN FREQUENZA (ARMONICA): ora ho $u(t) = A \sin \omega t \Rightarrow U(s) = A \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

a regime $y(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$

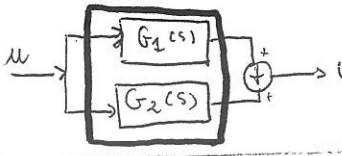
SCHEMI A BLOCCHI: I TIPI DI COLLEGAMENTO TRA SISTEMI FISICI, SI DIVIDONO IN 3 TIPI

→ COLLEGAMENTO IN SERIE



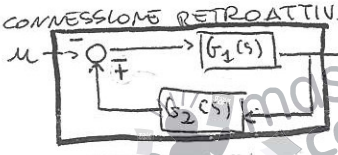
$G(s) = G_1 \cdot G_2$

→ COLLEGAMENTO IN PARALLELO



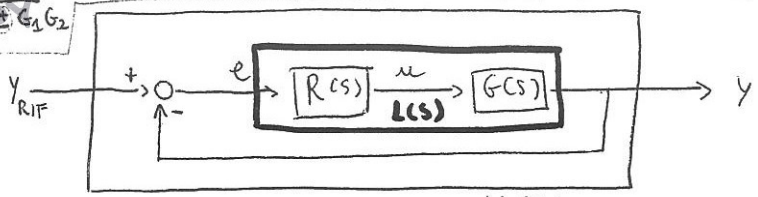
$G(s) = G_1 + G_2$

→ CONNESSIONE RETROATTIVA



$G = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2}$

CONTROLLO AUTOMATICO



$H(s)$

y_{RIF} = uscita desiderata

e = errore = $y_{RIF} - y$

FUNZIONE DI L È DETTA ESSERE STABILE

- **PER PROGETTARE UN REGOLATORE R(s)**: si parte attraverso il LOOP SHAPING, cioè si modella l'anello sulla base della risposta in frequenza dell'impianto. Prerequisito è la verifica delle prestazioni in ciclo chiuso sulla base delle proprietà della funzione d'Anello $L(s)$. Devo ⇒ Progettare R in modo che $L = RG$ rispetti particolari caratteristiche: POLI, ZERI, GUADAGNO del REG. STATICO

$H(s) = \frac{Y(s)}{Y_{RIF}(s)}$ = funzione di sensitività COMPLEMENTARE = $\frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}$

SENSITIVITÀ È BASTA È $\frac{1}{1+L}$

L'obiettivo è Progettare $R(s)$ in modo che $H(s)$ sia stabile BIBO

- ② ho modulo e fase: se fase < -180 ho un cambio di segno ⊖, è come se sommassi riferimento e uscita
- inversione di segno sostenibile solo se il MODULO di L è MINORE di 1

DISTURBI ADDITIVI

- d: disturbo di carico (es. auto → cambio pendenza) non può essere attenuato È L'INDIPENDENTEMENTE DAL TEMPO
- n: Rumore di misura (es. auto → ~~sporco~~) ATTRITO GOMME STRADA (cambio gomme e pressione sogeo) o CX

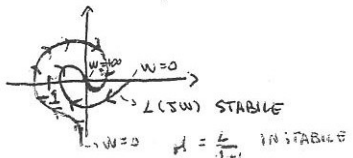
entrambi possono essere rigettati

→ Posso o ATTENUARLI FISICAMENTE

TEOREMA DI NYQUIST Hp: $L(s)$ BIBO STAB. a meno di 2 POLI nell'origine

⇒ il SISTEMA in ciclo chiuso $H(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ è stabile BIBO ⇔ il diagramma POLARE della risposta armonica di $L(s)$ percorso da $\omega = 0$ a $\omega = +\infty$ LASCIA alla sua sinistra il punto di coordinate $(-1, 0)$

→ ESEMPIO



I POLI IN CICLO CHIUSO SONO LE RADICI di $1 + L(s) = 0$

se $\exists\, \bar{\omega}$ t.c. $L(j\bar{\omega}) = -1$, $j\bar{\omega}$ è POLO IN CICLO CHIUSO

MARGINE DI FASE: indica di quanto può diminuire la fase prima che il sistema diventi INSTABILE. È un indice di robustezza della stabilità rispetto a ritardi fissi. Ritardo τ, sfasamento $-\omega\tau$

$M_\Phi = \angle L(j\bar{\omega}) - (-\pi)$ dove $\bar{\omega}$: è $|L(j\bar{\omega})| = 1$. Se $\exists!\, \bar{\omega} \Rightarrow H(s) = \frac{L}{1+L}$ è STABILE

Se $M_\Phi > 0$. Sia $\bar{\omega}$ l'unico valore: $\angle L(j\bar{\omega}) = -\pi \Rightarrow M_\Phi = \angle L(j\bar{\omega}) - \angle L(j\bar{\omega})$

SE LA FASE È UNA FUNZIONE MONOTONA DECRESCENTE

$|L(j\bar{\omega})| < 1 \Rightarrow H(s)$ è stabile

$|L(j\bar{\omega})| > 1 \Rightarrow H(s)$ è instabile

3

MARGINE DI GUADAGNO (o margine di ampiezza): ovvero di quanto può aumentare il modulo prima che il sistema diventi instabile. È un indice di robustezza della stabilità rispetto a incertezze sul guadagno statico della funzione di anello L

$M_G = 0 - 20 \log |L(j\bar{\omega})|$ con $\bar{\omega}: \angle L(j\bar{\omega}) = -\pi$

QUINDI $M_G = 20 \log |L(j\bar{\omega})| - 20 \log |L(j\bar{\omega})|$

SPECIFICHE DEI REGOLATORI: devo progettare un regolatore la quale $R(s)$ moltiplicato alla $G(s)$ del sistema, e retroazionandolo, rispetti le specifiche che mi vengono date.

- SPECIFICA 1) $e_s(\infty) = K\%$ => devo mettere un polo in + rispetto al numero di intersezioni del gradino fatto
- SPECIFICA 2) specifiche sul transitorio, $t_{ASS} \leq T^*$ (esaurimento del transitorio in tempi brevi)

I ORDINE: $T_{ASS} = -\tau \ln(0{,}05) \quad \text{con} \quad \tau = \frac{1}{\omega_c}$

II ORDINE $T_{ASS} = -\frac{1}{\xi \omega_n} \ln(0{,}05) \Rightarrow \omega_n \approx \omega_c$

si traduce in una specifica sul taglio a zero dB

- SPECIFICA 3) $S\% \leq \bar{S} \Rightarrow \varphi_m = 100\xi \geq 100 \sqrt{\frac{\ln(\bar{S})^2}{\pi^2 + \ln(\bar{S})^2}}$ dato che $S\% = 100\, e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

se $\bar{S} = 0 \Rightarrow \varphi_m > 75°!!!$

↳ MARGINE DI FASE

FORMULARIO REGOLATORI

errore: $e_I(\infty) = 0 \rightarrow \frac{1}{s} \quad e_r(\infty) \leq \eta\% \rightarrow \frac{1}{1+K} < \frac{\eta\%}{100}$

$e_/(\infty) = 0 \rightarrow \frac{1}{s^2} \quad e_/(\infty) \leq \eta\% \rightarrow \frac{1}{K} < \frac{\eta\%}{100}$

TEMPO DI ASSESTAMENTO

$t_{ASS\%} = -\tau \ln\left(\frac{\varepsilon\%}{100}\right)$ se ε piccolo: $\tau > -\frac{n}{\ln(\frac{\varepsilon\%}{100})}$ | se ε grande $\tau > -\frac{n}{\ln(1-\frac{\varepsilon}{100})}$

$\omega_{BP} = \frac{1}{\tau}$

master COPY COPISTERIA