CONTROLLI AUTOMATICI

Sistema: qualcosa che è in se auto contenuto e si diversifica dall'ambiente

Sistema dinamico a tempo continuo: costituisce un modello matematico da integrare con il mondo circostante tramite dei vettori: variabili di ingresso e uscita.

- INGRESSI ($u(t)$): le CAUSE ESTERNE CHE AGISCONO SUL SISTEMA
- USCITE ($y(t)$): effetti che escono dal sistema

→ $u(t) \in \mathbb{R}^m$
→ $y(t) \in \mathbb{R}^p$

- STATO ($x(t)$): condiz. interne che descrivono il comportamento del sistema.

→ $x(t) \in \mathbb{R}^n$

La dinamica è descritta da due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u) & \text{EQUAZIONE DI STATO (forma di stato)} \\ y(t) = g(x,u) & \text{EQUAZIONE DI USCITA} \end{cases}$$

Sistema lineare tempo invariante (LTI) (STAZIONARIO)

FORMA STANDART SISTEMI LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx + du \end{cases}$$

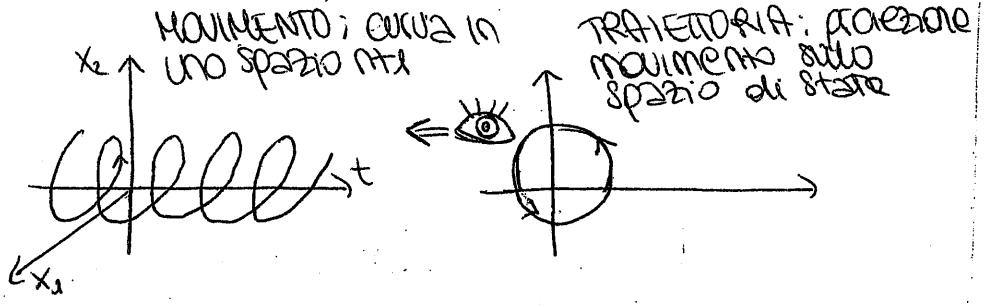
LINEARE: vale principio di sovrapp. degli effetti
STAZIONARIO: data $u(t)$ e $x(t)$ l'uscita è sempre la stessa indipendentemente dal t.

SISTEMA PROPRIO: se u appare in y. (c'è istantaneità tra ingresso e uscita) (non reale)

SIST. STRETTAMENTE PROPRIO: u non appare in y. (l'ingresso deve prima passare nella dinamica del sist. per uscire)
(O CAUSALE)

MOVIMENTO e TRAIETTORIA → è il GRAFICO di $x(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = y(x,u) \end{cases}$$



SISTEMA DINAMICO A TEMPO ~~VARIANTE~~ (CONTINUO)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) \rightarrow \text{relazione tra ingresso e variabili che descrivono stato interno del sistema} \\ y(t) = g(X(t), u(t), t) \rightarrow \text{consente di det. un'uscita a un dato } t. \end{cases}$$

SISTEMI LINEARI

Quando f e g sono lineari in X e u, cioè quando $\dot{X}(t)$ e $y(t)$ sono combinazioni lineari di $X(t)$ e $u(t)$.

↳ $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n$

SISTEMI LINEARI: ideali su cui possiamo fare calcoli.

SIST. NON LINEARI: sono irreali.

EQUILIBRIO

Dato un ingresso costante e uno stato si dice STATO DI EQUILIBRIO rispetto all'ingresso se lo stato rimane costante $\forall t$.

(lo stato di eq. dipende dall'ingresso)

Gli stati di equilibrio devono soddisfare $\dot{X}(t) = 0$.

$$\dot{X} = \underbrace{f(X, u)}_{\text{FORMA DI STATO}} = 0$$

EQ STABILE: se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $|X_0 - \bar{X}| \leq \delta$

EQ INSTABILE (se non è stabile) $\Rightarrow |X(t) - \bar{X}| < \varepsilon$ (se la traiettoria non esce mai da ε).

ASINTOTICAM. STABILE: se è stabile e se $\lim_{t \to \infty} X(t) = \bar{X}$

L'origine è sempre stato di eq. per sistemi LTI.

FORMULA DI LAGRANGE:

$$X(t) = \underbrace{e^{At} \cdot X_0}_{\text{MOV. LIBERO}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(t)\, d\tau}_{\text{MOV. FORZATO}} \qquad t \geq t_0$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} X_0 + C \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + D u(t) \quad t \geq t_0$$

MOV. LIBERO: quello che si avrebbe se l'ingresso fosse nullo

MOV. FORZATO: quello che si avrebbe se le condizioni iniziali fossero nulle

- se l'ordine di A è $n=1$ per studiare movimento libero del sistema:

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0 \\ y(t) = Ce^{A(t-t_0)} \cdot x_0 \end{cases}$$

- se $n>1$, devo studiare e^{At} e i suoi autovalori.

- DIAGONALIZZABILE ($A = P\Lambda P$) (molt. alg = mol geom)
Posso far assumere ad A una forma DIAGONALE perché ha autovalori distinti

- NON DIAGONALIZZABILE: la matrice A ha autovalori multipli → ci impedisce di renderla diagonale

- DIAGONALE $\Rightarrow A = \Lambda e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

Matrice diagonale a blocchi dove ciascun blocco è associato ad un autovalore

$e^{\lambda_k t}$ → MODI PROPRI DEL SISTEMA

Definisco la forma di JORDAN di A (se è diagonale A è diagonalizzabile)

- Dimensione blocchi = molt. algebrica (ν)
- Numero blocchi elementari J_i = molt. geometrica (μ)

CASI PART
1) Tutti autoval distinti $\nu = \mu = 1$ mat. diagonale (ci sono n blocchi di dim 1)
2) $\nu = \mu = K$ i blocchi elem. hanno dim = 1 ⇒ diagonale

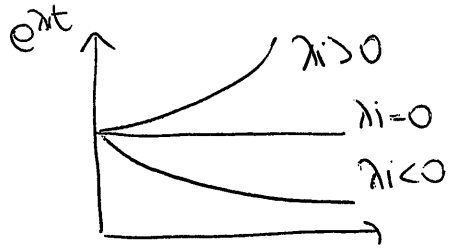
$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_K \end{bmatrix} \quad (J_1: \nu_1 \times \nu_1,\ J_K: \nu_K \times \nu_K)$$

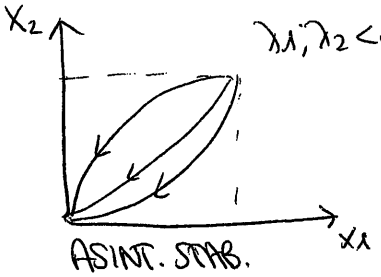
$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{i\mu} \end{bmatrix} \quad (\nu_i \times \nu_i)$$

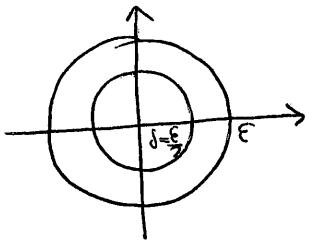
Il movimento di un sist. è stabile, inst. o asintot. stabile se tutti i movimenti di quel sist sono rispett. stabili, instabili o asintoticam. stabili.

STABILE: tutti i movimenti liberi sono limitati
ASINTOTIC. STAB: tutti i mov liberi $\to 0$, $t \to \infty$
INSTABILE: almeno 1 movim. lib è illimitato

DIAGONALE (e diag. blz. nel caso autoval. reali)



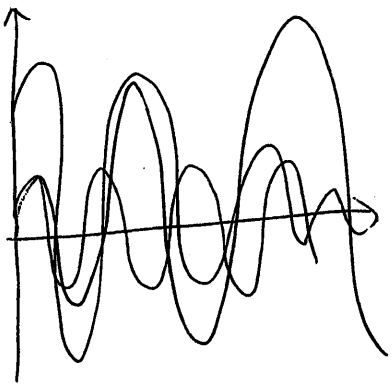




Nel caso diagonale autovalori = 0 configurano equilibri stabili

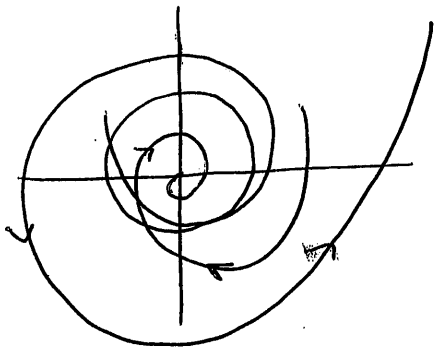
DIAGONALIZ. (complessa) (perché per DIAGONALE e DIAGONALIZZABILE $r = \mu$)

$e^{\sigma t} \sin \omega t$



$\sigma = 0$
$\sigma > 0$
$\sigma < 0$

TRAIETTORIA



MATRICE DI JORDAN (con $r_i > \mu_i$)

Autovalori reali

$te^{\lambda t}$

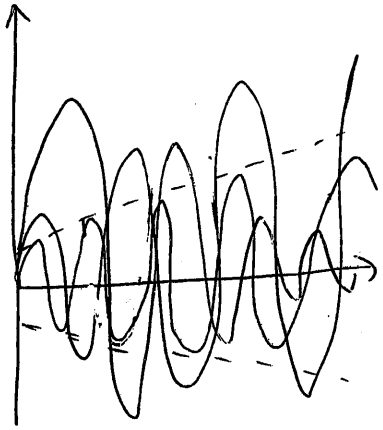


$\lambda = 0$
$\lambda < 0$
$\lambda > 0$



Autovalori complessi

$te^{\sigma t} \sin \omega t$



$\sigma = 0$ (si apre per la presenza di t)
$\sigma > 0$
$\sigma < 0$

STABILITÀ e AUTOVALORI

$\det(\lambda I - A) = 0$

↳ calcolo e trovo autovalori

Se autovalore è complesso coniugato $(\sigma + j\omega)$ devo vedere se σ è $>, <, = 0$

- Se $Re(\lambda_k) < 0$ Sistema asintoticamente stabile
- Se $Re(\lambda_k) \leq 0$ e $V.=M$ dell'autovalore $Re=0$ allora è stabile

(per vederlo $(0 \cdot I - A)$ e guardo il rg)

- Se ce n'è almeno 1 con $Re > 0$ SIST. INSTABILE

REGOLA DI CARTESIO: $(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)$

2 permanenze $(\alpha, \beta > 0)$ (non posso dire nulla)

1 variazione $(\alpha > 0, \beta < 0)$ (almeno 1 parte reale > 0)

master COPY

LINEARIZZAZIONE

I sistemi lineari rappresentano le dinamiche dei sistemi non lineari nell'intorno dei loro stati di equilibrio.

Descrivere il comportamento di un SIST. non lineare attorno all'equilibrio mediante un particolare SIST. lineare.

$u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$ → scostamento dallo stato di equilibrio
$x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$
$y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$ → SI FORMA UN SISTEMA LINEARIZZATO
$x_0 = \bar{x_0} + \delta x_0$

① Lo stato di eq. $\bar{x}$, relativo ad $\bar{u}$, del sistem non lineare è asint. stabile se tutti gli autovalori del SIST. linearizzato hanno $Re_i < 0$

② Lo stato di eq $\bar{x}$, relativo ad $\bar{u}$ del SIST. non linearizz. è instabile se linearizz. è instabile ($Re_i > 0$)

PER I SISTEMI LINEARI LA STABILITÀ NELL'ORIGINE IMPLICA LA STABILITÀ DI TUTTO IL SISTEMA.

master COPY