CONTROLLO DIGITALE

Lezione 01)

email docente: matteo.bisoffi@unipi.it

Sistemi di controllo digitale

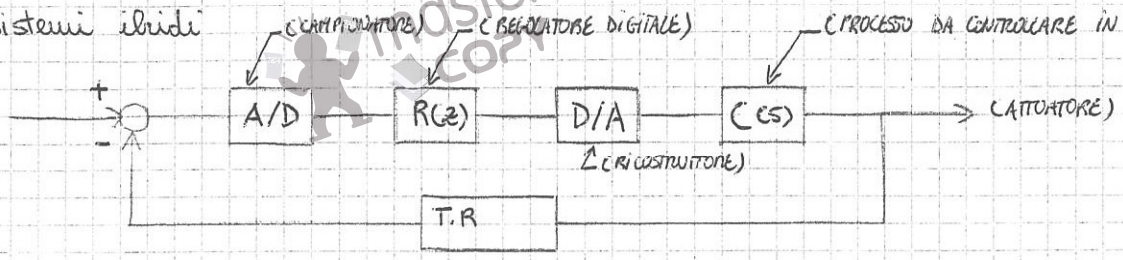
Sono dei sistemi di controllo in retroazione che prevedono nel loro anello la presenza di un elaboratore digitale il quale provede a fornire l'elaborazione a tempo discreto delle leggi di controllo (che risulta normalmente a tempo continuo).

Si parla quindi di sistemi a dati campionati

I segnali vengono elaborati e trasmessi come sequenze di numeri di dati

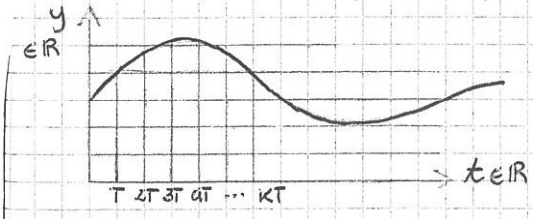
Nei sistemi tempo continuo abbiamo dati in $t \in \mathbb{R}$ di natura analogica.

Sistemi ibridi



Sono ibridi perché gestiscono dei dati a TD su cui agisce il nostro regolatore per ottenere la legge di controllo TD però ci sono anche delle parti analogiche riferite alla parte da controllare. Sono necessarie delle interfacce che ci permettono di comunicare tra il dominio TC e TD: avremo il campionatore (A/D) e il ricostruttore (D/A)
Questo perché l'attuatore finale nel seguente schema a blocchi recepisce solo e prendere nel dominio TC.

- Come sono fatti i segnali digitali?



Per ottenere un segnale digitale da uno continuo, necessitiamo di 2 operazioni:

1) CAMPIONAMENTO: vado a considerare il segnale in un insieme di valori discreti (forniti da un clock) equispaziati tra di loro.

$t = K \cdot T$ ← (TEMPO DI CAMPIONAMENTO)

Il tempo di campionamento è fondamentale per una successiva ricostruzione del segnale (lo vedremo meglio con il teorema di Shannon)

2) QUANTIZZAZIONE: i sistemi di elaborazione digitale lavorano in BIT i quali definiscono dei livelli di quantizzazione ($2^8, 2^{10}, 2^{12}, \dots$)
Questi livelli di quantizzazione vengono espressi con delle linee orizzontali nel grafico
Si approssima l'ampiezza del segnale al corrispettivo livello di quantizzazione più vicino.

Queste 2 operazioni ci permettono di passare da un segnale di tipo analogico a uno digitale

Nel nostro corso ci focalizzeremo nel campionamento (la quantizzazione in un ottica del controllo di un sistema digitale è trascurabile).

- Perché si utilizzano segnali di tipo digitale?

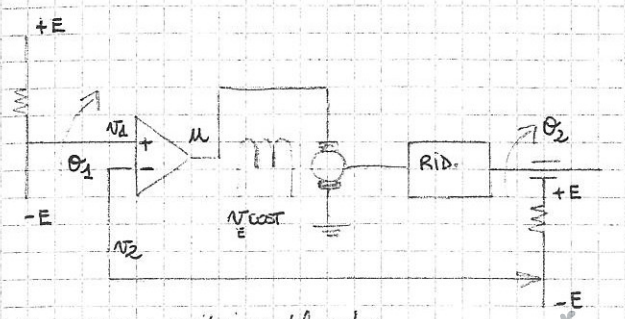
1) Hanno una grande flessibilità;
2) Si può modificare andando a modificare il software e non l'hardware (come nel caso analogico);
3) Capienza di elaborazione;
4) Affidabilità e Ripetibilità;
5) Trasmettibilità dei segnali (in principio senza errori).

Tuttavia presentano anche i seguenti problemi:

1) Stabilità del segnale (dovuto al ritardo generato dal campionamento) → è legata a T (PERIODO CAMPIONAMENTO)

Vediamo com'è fatto un controllore di tipo analogico ed effettuiamo il duale con uno di tipo digitale.

Controllore analogico (SERVOMECCANISMO di POSIZIONE in corrente continua)



oss: v_2 = costante → eccitazione del motore

L'ingresso θ_1 e l'uscita θ_2 di questo sistema è una posizione angolare

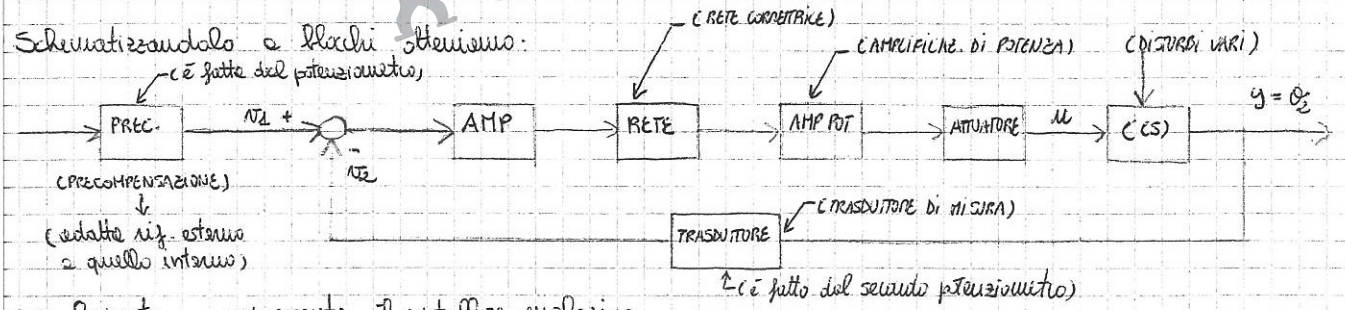
Per mezzo di potenziometri (sono le resistenze nello schema), le posizioni angolari vengono rappresentate come tensioni v_1 e v_2.

L'Aop con ingresso differenziale fa la differenza tra i 2 segnali v_1 e v_2

L'uscita "u" dell'amplificatore alimenta direttamente il circuito dell'armatura di un motore in corrente continua.

L'uscita del motore va all'interno di un riduttore e ingranaggi che fa variare la posizione angolare θ_2 andando a minimizzare l'errore $v_1 - v_2$.

Schematizzandolo a blocchi otteniamo:



oss: la parte rappresenta il controllore analogico

Questo sistema viene descritto mediante un insieme di equazioni differenziali ordinarie che legano l'uscita all'ingresso:

ODE : $F(y(t), Dy, \dots, Dy^m, u(t), Du, \dots, Du^p, t) = 0$ con $p < m$ (FORMA CAUSALE)

Sotto opportune semplificazioni, questa può essere riscritta in forma NORMALE, ovvero:

$Dy^m = \hat{F}(y, Dy, \dots, Dy^{m-1}, u, Du, \dots, Du^p)$

Successivamente dalla forma normale è possibile passare alla forma di STATO

posso quindi a un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine che dipendono dalle variabili di stato, non da particolari stati agli istanti iniziali $t=0$

$$\begin{cases} \underline{D}x = f(x,u,t) \Rightarrow \text{EVOLUZIONE DELLO STATO} \\ \underline{y} = h(x,u,t) \Rightarrow \text{EVOLUZIONE DELL'USCITA} \end{cases}$$

Posso andare a calcolare gli Jacobiani delle matrici A, B, C, D:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \qquad C = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{\bar{x},\bar{u}} \qquad D = \frac{\partial h}{\partial y}\Big|_{\bar{x},\bar{u}}$$

calcolate negli istanti di equilibrio $\bar{x}$ e $\bar{u}$ $\Rightarrow f(\bar{x},\bar{u},t) = 0$

Posso scrivere l'evoluzione dei nostri sistemi come:

$x(t) = x_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B\, u(\tau)\, d\tau$ (EVOLUZIONE DELLO STATO)

da cui posso scrivermi anche l'evoluzione dell'uscita:

$$\left.\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}\right\} \text{(sui ricavi)}$$

Nel nostro corso andremo a studiare i sistemi lineari tempo invarianti LTI, dove le matrici A, B, C e D sono costanti (non dipendono dall'istante iniziale)
Quindi gli scalari sono tutti nulli.

Il caso LTI strettamente causale abbiamo le seguenti semplificazioni:

D=0

A ⇒ tramite gli autovalori posso andare a studiare la stabilità → ASINTOTICA STABILITÀ ⇒ $\lambda_i \in \mathbb{R}^-$
→ MARGINALE STABILITÀ ⇒ ho un λ sul bordo della regione di stabilità rosso immag.)
→ SISTEMA INSTABILE ⇒ polinomialmente divergente o esponenz. divergente

oss: nel tempo discreto useremo le equazioni alle differenze (analogo delle ode)

Nel tempo continuo, si utilizza la trasformata di Laplace che mi permette di semplificare i calcoli:

(PROBLEMA OGGETTO) → (SOLUZIONE OGGETTO)
$\mathcal{L}[\,]$ ↓ ↑ $\mathcal{L}^{-1}[\,]$
(PROBLEMA IMMAGINE) → (SOLUZIONE IMMAGINE)

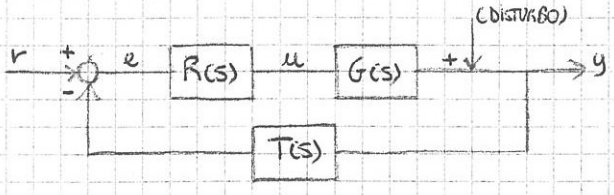
$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

oss: $x \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ e $y \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\text{in Laplace}} \begin{cases} sX = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \longrightarrow G(s) = \frac{Y}{U} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

(FUNZIONE DI TRASFERIMENTO)

Riscrivendo lo schema a blocchi nel dominio di Laplace otteniamo:



si assume che il trasduttore T(s) ha una dinamica istantanea, possiamo scrivere la funzione di trasferimento del sistema controllato:

$$G_C(s) = \frac{R(s) \cdot G(s)}{1 + R(s) \cdot G(s)}$$ → noi da controllisti digitali abbiamo già a conoscenza una legge R(s) in tempo continuo che agendo sul sistema in oggetto, garantisce la controllabilità con il rispetto delle specifiche di:

1) Asintotica stabilità;
2) Specifiche statiche ; ⇒ inseguimento dei riferimenti polinomiali.
3) Specifiche dinamiche. ⇒ comportamento sistema durante transitori.

Il nostro obiettivo è: conoscendo R(s), voglio ottenere una R(z) con le medesime prestazioni.

$R(s) = \frac{K}{s^t} \cdot R_0(s)$
↑ (serve per rispettare le specifiche dinamiche)
↑ (serve per rispettare le specifiche statiche)

Noi utilizzeremo in particolare come $R_0(s)$:

1) RETE ANTICIPATRICE ⇒ $R_0(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$ con $\tau > 0$ e $\alpha > 0$ e < 1

2) RETE RITARDO ⇒ $R_0(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$ con $\alpha > 1$ e $\tau > 0$

Importante per il campionamento è capire se sono presenti 1 polo dominante o 2 poli dominanti.

$\omega_{CAMP} = \frac{2\pi}{T_s}$ ← deve essere maggiore di almeno 2 volte la banda passante del mio sistema (Per il teorema di Shannon)

Teorema Shannon: dato un segnale analogico c(t), con f_M, il segnale c(t) può essere ricostruito univocamente dai campioni presi a $f_s > 2 f_M$

Bisogna sempre valutare qual'è la banda passante del mio sistema per scegliere correttamente la pulsazione di campionamento per rispettare il criterio di Shannon

Definizione

Nelle ipotesi in cui è possibile applicare il teorema di Bode : No poli parte reale positivi allora se il diagramma di Bode della RG interseca l'asse a ϕ dB una sola volta, il sistema Gc è asintoticamente stabile se il margine di guadagno $\mu > 0$ e se il margine di fase $MF > \phi$ (massimo ritardo dell'anello chiuso).
Quando valgono questi criteri di Bode, la pulsazione critica di attraversamento dell'asse a 0 dB può essere scelta come la pulsazione che identifica la banda passante della Gc quando $MF > 60°$

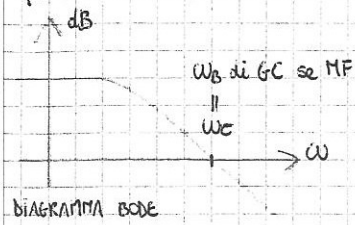


DIAGRAMMA BODE

Perché questa cosa è importante?
Vediamolo attraverso un esercizio

master COPY

Esercizio)

Gc ⇒ $S\% = \phi$ (sovraelongazione nulla) Supponiamo che esista il controllore : $R(s) = \frac{s+1}{s+10}$

$\tau_{ass\%} = 1$ sec (tempo di assestamento)

Scegliere per le seguenti specifiche, il corretto tempo di campionamento Ts

deve valere il teorema di Shannon, avere $\omega_S > 2\omega_B$

Bisogna capire quanto vale la ω_B del sistema.

Utilizzando la definizione precedente posso dire che $\omega_B = \omega_c$ avero la pulsazione di taglio.

Dato che la S%, la Gc può essere approssimata a un polo dominante avero il $MF \approx 90°$ quindi la definizione è ben posta.

$\omega_c \sim \omega_B$

Nei sistemi a 1 polo dominante $\omega_c = \frac{3}{\tau_{ass}}$ ⇒ tempo di assestamento

Se invece avessi una $S\% \neq \phi$ cosa cambierei?

Il sistema Gc si può approssimare come 2 poli dominanti complessi coniugati

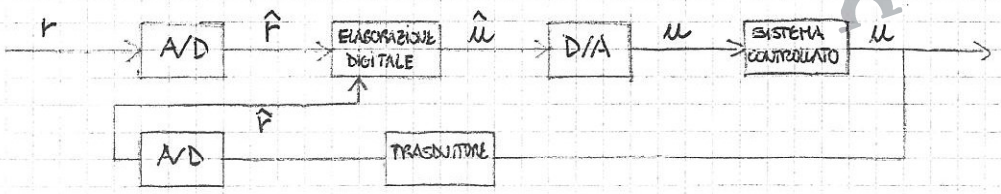
$\omega = \omega_n \sqrt{1-\delta^2} \sim \omega_B$

$MF \sim 100\,\delta$ dove δ = smorzamento

$\tau_{ass\%} \Rightarrow \omega_n \frac{3}{\delta T_{ass}} \overset{?}{=} \omega$

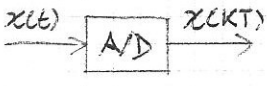
master COPY

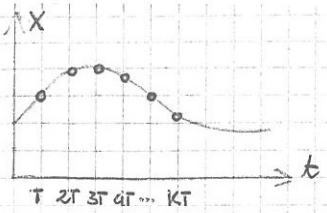
Lezione 02



- A/D (campionatore)

L'interfaccia analogico/digitale effettua il campionamento del segnale (ANALOGICO → DIGITALE)



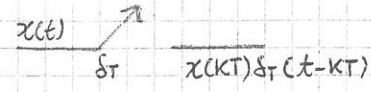


- Come si modella matematicamente un campionatore?

Un campionatore ideale si modella come "un processo a modulazione di impulsi di Dirac".

Nel suo esempio più semplice, un campionatore viene realizzato mediante un interruttore.

oss: per $t = KT$ questo segnale ha ampiezza pari a $x(KT)$



master COPY COPISTERIA

- D/A (ricostruttore)

Realizza l'operazione inverse al campionamento (DIGITALE → ANALOGICO)
Questa operazione NON è ovviamente DETERMINATA se non vengono rispettate le condizioni previste dal teorema di Shannon.

master COPY

Teorema di Shannon

Ci fornisce delle condizioni per il tempo di campionamento per evitare di semplificare nel passaggio tra DIGITALE → ANALOGICO

Guardiamo cosa succede se non viene rispettato quanto detto dal teorema di Shannon:

$y(t) = \sin((\alpha+2h)\pi t)$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e h è intero

supponiamo che $T_s = 1$ sec (teorema di campionamento)

$y(t) \rightarrow y(KT_s) = \sin((\alpha+2h)\pi K)$ e queste usiamo la formule $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$

$= \sin(\alpha\pi K)\cos(2h\pi K) + \cos(\alpha\pi K)\sin(2h\pi K)$

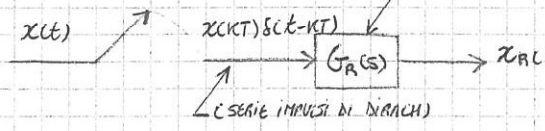
$= \sin(\alpha\pi K)$

Quindi ottengo $y_0 = \sin(\alpha\pi K)$

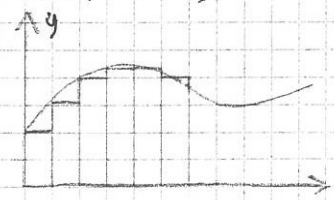
Se non scelgo correttamente il T_s non sono in grado di ricostruire il segnale a partire dai valori campionati.

Di ricostruttori ne esistono di svariate tipologie (ordine 0, ordine 1, con linearità, ecc...)

RICOSTRUTTORE DI ORDINE ZERO — (FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL RICOSTRUTTORE ϕ) $= \frac{1-e^{-sT}}{s}$



$x_R(t) = x(KT)$ con $KT \le t \le (K+1)T$



oss: è continuo a tratti

master COPY COPISTERIA
master COPY

TEMPO DI CALCOLO τ_{COMP}

È un ritardo più piccolo del tempo di campionamento T_s che deve essere preso in considerazione perché influenzerà le prestazioni rispetto a quelle che vogliamo ottenere idealmente dalla discretizzazione del segnale.

- Equazioni alle differenze e trasformate z

Supponiamo di avere una sequenza di campioni $e_K = e(KT)$ sono processati per ottenere il segnale di controllo u_K in uscita

$u_K = f(e_0, e_1, e_2, \dots, e_K, u_0, u_1, u_2, \dots, u_K)$

acquisisco segnale u_K a ogni nuovo campione e_K