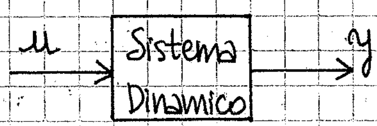
Prima Parte

CONTROLLI AUTOMATICI



vettore d'ingresso $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$

↓

è un segnale in funzione del tempo

vettore d'uscita $\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^p$

↓

ha dimensione diversa dal vettore d'ingresso

Stato $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ insieme di informazioni sul sistema ad ogni istante t_0 tali che è possibile determinare $\underline{y}(t)$ e $\underline{x}(t)$ per $t > t_0$, conoscendo $u(t)$ per $t \geq t_0$.

FUNZIONI DI TRANSIZIONE DI STATO

$$\underline{x}(t) = \Phi(t_0; x(t_0); \underline{u}(t); t) \quad \text{per } t \geq t_0$$

$$\underline{y}(t) = g(\underline{x}(t), u(t), t) \quad \text{per } t \geq t_0$$

FORMA STANDARD (sistema non lineare MIMO invariante nel tempo e proprio)

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t_0), u(t)) \dashrightarrow \dot{\underline{x}}(t) = \frac{d}{dt}\underline{x}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t), u(t), t)$$

L'evoluzione del sistema NON dipende dal momento in cui applichiamo condizioni iniziali e cause esterne.

LINEARITÀ

Un sistema stazionario si dice lineare se:

① $\underline{x}_1(t) = \Phi(\underline{x}(t_0), u_1(t))$ è la soluzione dell'eq. differenziale con queste condizioni iniziali.

② $\underline{x}_2(t) = \Phi(\underline{x}(t_0), u_2(t)) \rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

EQUILIBRIO

Diciamo che lo stato x^* è uno stato di equilibrio per l'ingresso $\underline{u}^*$ se

$$f(\underline{x}^*, \underline{u}^*) = \emptyset$$

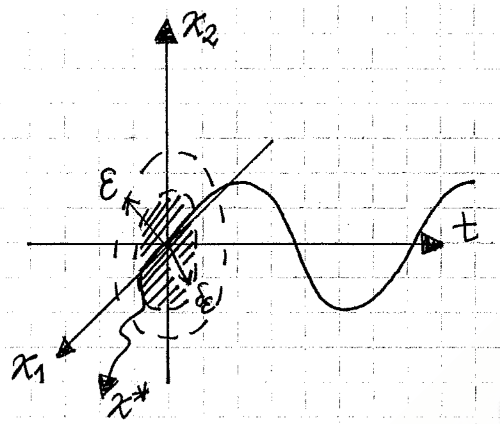
Uno stato può essere di equilibrio con un certo ingresso ma può non esserlo con un altro ingresso.

SISTEMA AUTONOMO

Sia $\underline{u}^* = \underline{0}$ e $f(\underline{x}^*, \underline{0}) = \underline{0} \longrightarrow \underline{x}^*$ e' stato di equilibrio per il sistema autonomo

Allora lo stato $\underline{x}^*$ si dice di equilibrio stabile se $\forall \varepsilon > 0$
$\exists\, \delta_\varepsilon$: se $\| x^* - x(0) \| < \delta_\varepsilon$ allora $\| x(t) - x^* \| < \varepsilon \;\; \forall t \geq 0$.

(Se parto dallo stato $\underline{x}^* = x(0)$ allora non mi muoverò dallo stato di equilibrio. Se mi sposto un po' lo stato e' stabile)



$\dot{x} = ax \quad t > 0 \quad a \in \mathbb{R}$
Stati di equilibrio $ax = 0$
$\rightarrow x = 0 \quad a \neq 0$

L'origine e' uno stato di equilibrio con condizione iniziale
$x(0) = x_0$
$x(t) = x_0 \cdot e^{at}$

Come trovo δ_ε? Uso il duo "fisso" e "pongo" (VEDI APPUNTI PAG 3)

---

x^* e' ASINTOTICAMENTE STABILE se e' stabile e se il

$$\lim_{t \to +\infty} \| \underline{x}(t) - x^* \| = 0$$ (CONDIZIONE PIU' FORTE DELLA STABILITA').

$\downarrow$

STABILITA' INTERNA O DI LYAPUNOV.

FORMA STANDARD LINEARE

$$\dot{\underline{x}} = Ax + Bu$$

FORMA STANDARD DELL'EQUAZIONE DI USCITA

$$y = C\underline{x} + D\underline{u}$$

Abbiamo contemporaneità di causa e di effetto. Se e' presente la matrice $D \rightarrow$ SISTEMA PROPRIO. Se Du non c'e' allora si parla di SISTEMA STRETTAMENTE PROPRIO.

FORMA STANDARD DEI SISTEMI DINAMICI $\longrightarrow$ $\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ y = C\underline{x} \end{cases}$

(non compare la matrice $D \rightarrow$ sistema lineare, stazionario e strettamente proprio)

Soluzione per questo sistema di n equazioni differenziali =

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{At}}_{\text{matrice}} \cdot \underbrace{\underline{x}_0}_{\substack{\text{vettore}\\\text{condizioni}\\\text{iniziali}}} + \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}}_{\text{matrice}} \underbrace{B}_{\text{matrice d'ingresso}} \underbrace{u(\tau)}_{\text{vettori d'ingresso (cause)}} d\tau$$

$$\underbrace{e^{At}}_{\substack{\text{matrice quadrata}\\ n\times n}} \triangleq I + At + \frac{A^2}{2}t^2 + \frac{A^3}{6}t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

$$e^{At} \in \mathbb{R}^{n\times n} ; \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

<u>ESPONENZIALE DI MATRICE</u> (simile alla serie di Taylor per la funzione esponenziale)

$$e^{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$e^{\alpha t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \emptyset + A + A^2 t + \frac{1}{2}A^3 t^2 + \dots = A\left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots\right) =$$

$$= \underbrace{A}_{\text{matrice del sistema}} \cdot e^{At}$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \cdot e^{At} \underline{x}_0 + B\,\underline{u}(t) + \int_0^t A e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau =$$

$$= A\left(e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau\right) + B\,\underline{u}(t)$$

EVOLUZIONE COMPLESSIVA → SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

- **EVOLUZIONE LIBERA** — risposta libera, non dipende dagli ingressi: $e^{At} \cdot \underline{x}_0$ è una combinazione lineare data da esponenziali
- **EVOLUZIONE FORZATA** — risposta forzata: $\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot \underline{u}(\tau)\, d\tau$

Per calcolare $\underline{x}(t)$ ho bisogno di sapere e^{At}; devo trovare una matrice simile ad A.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ La matrice A è simile ad una matrice diagonale λ

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \exists\, T, T^{-1} \qquad \lambda = TAT^{-1}$$

$$A = T^{-1}\lambda T$$