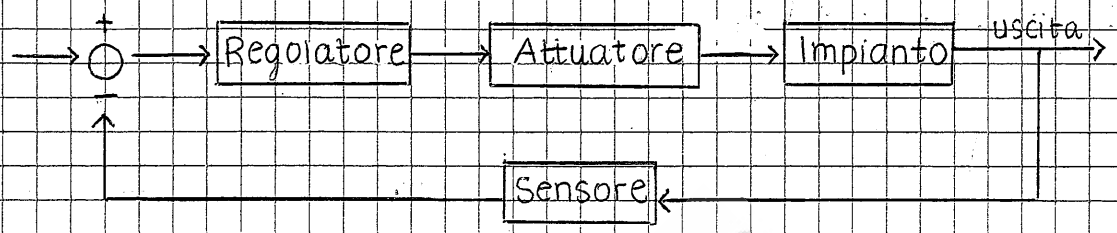
Controlli automatici

Andrea Caiti
andrea.caiti@unipi.it
Ricevimento: martedì 17.30
Esame: orale
2 test di apprendimento

Libro: "Fondamenti di Controlli automatici" Bolzern, Scattolini, Schiavone - McGraw Hill Italia



In generale:



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

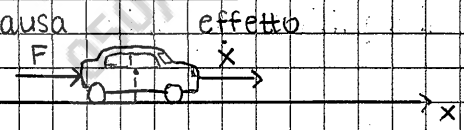
Possono esserci più ingressi e più uscite.
La dinamica è l'insieme delle leggi fisiche che a partire da una causa provocano un effetto. Se la dinamica è descritta da leggi fisiche, la mediazione tra causa-effetto del sistema verrà descritta da equazioni fisiche (dinamiche) di tipo differenziale.

2 grandi temi:

- Studio delle proprietà strutturali dei sistemi: **Teoria dei sistemi**
- Descrizione dei sistemi: **Progettazione**

Sistema: qualcosa che siamo in grado di distinguere da tutto il resto del mondo

Es.



$m\ddot{x} = F$

x_1 = posizione $(x_1 = x)$
x_2 = velocità $(x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x})$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m\dot{x}_2 = F \end{cases}$$

Per risolverla devo avere le condizioni iniziali (a $t=0$) e quindi $x_2(0)$ e $x_1(0)$

L'insieme di informazioni tali per cui, a partire da un generico istante t_0, è possibile determinare l'andamento del sistema per $t \geq t_0$ assieme alla conoscenza dell'ingresso, è detto **stato del sistema**. Lo stesso sistema può essere descritto da diversi stati a patto che mi diano le informazioni necessarie a conoscere l'andamento del sistema da t_0 a $t > t_0$.
Solitamente gli ingressi dipendono dal tempo.

Ingresso: $\underline{u}(t)$ $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ Stato: $\underline{x}(t)$ $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ Uscita: $\underline{y}(t)$ $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$

Eq. di stato $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{x}(t_0), t, \underline{u}(t))$

Eq. di uscita $\underline{y}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t), t, \underline{u}(t))$

Se $\underline{y}$ non dipende esplicitamente da $\underline{u}(t)$ allora il sistema si dice **strettamente causale (proprio)**: gli ingressi sono le cause e le uscite gli effetti, in tal caso c'é un ritardo dell'effetto che dipende dalla dinamica.

Se $\underline{x}$ e $\underline{y}$ non dipendono esplicitamente da t allora il sistema si dice **stazionario (tempo-invariante)** (ciò significa che l'andamento del sistema non dipende da t_0, ma esso, nel futuro, avrà un andamento costante, si può scegliere un t_0 convenzionale che solitamente é 0)

Se $\underline{f}$ e $\underline{g}$ sono funzioni lineari di $\underline{x}$ e $\underline{u}$ ($\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t)$; $\underline{y}(t) = C(t)\underline{x}(t) + D(t)\underline{u}(t)$) il sistema si dice **lineare**.

Le tre proprietà enunciate sono fra loro indipendenti. Se A B C e D sono costanti il sistema é lineare e stazionario. Se $D = 0$ il sistema é strettamente proprio.

Lavoreremo su sistemi lineari e stazionari.

Caso generale:

Definiamo i punti di equilibrio di un sistema dinamico

Punto di equilibrio: punto in cui lo stato del sistema é costante nel tempo. Uno stato $\underline{x}_0$ si dice "stato di equilibrio" rispetto ad un ingresso $\underline{u}_0(t)$ se $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \underline{u}_0(t)) \equiv 0 \quad \forall t > t_0 \quad \underline{x}(t) \equiv \underline{x}_0 \quad \forall t > t_0$

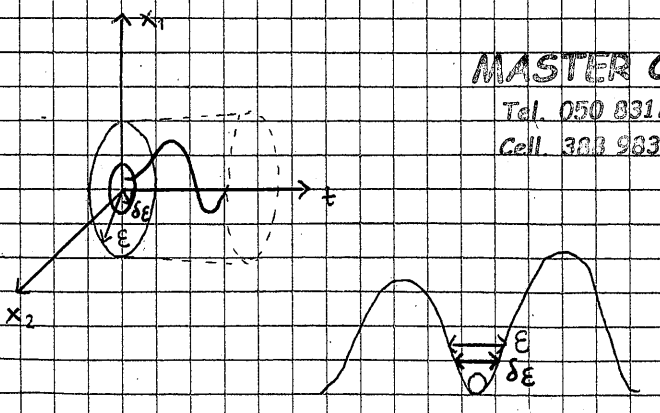
Ipotizzando:

- Sistema stazionario
- $\underline{x} = 0$ é stato di equilibrio per ingresso nullo

$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{x}(0) = \underline{x}_0, u(t)) \quad , \quad f(\underline{0}') \equiv \underline{0}$

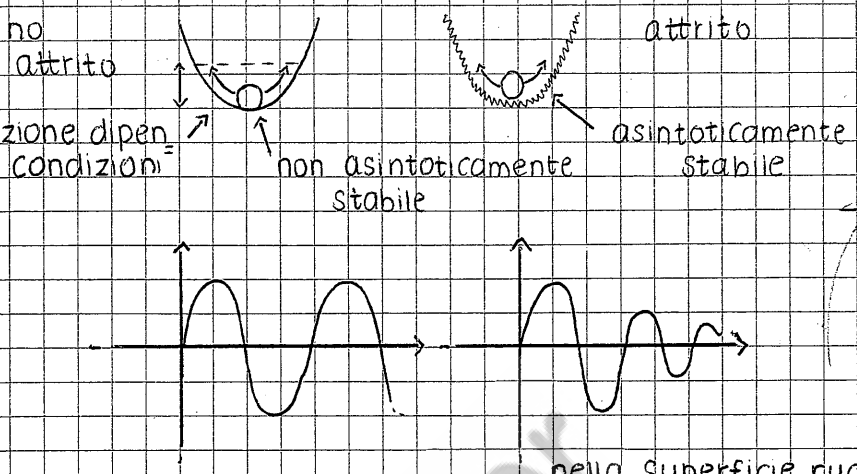
L'origine si dice **stato di equilibrio stabile** se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon$: se $\| \underline{x}(0) - \underline{0} \| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \| \underline{x}(t) - \underline{0} \| < \varepsilon$

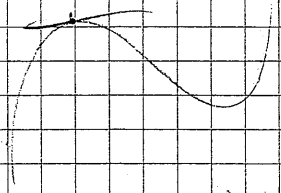
intorno del punto di equilibrio di raggio ε



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Se inoltre $\|\underline{x}(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, allora l'origine è un **punto di equilibrio asintoticamente stabile** (proprietà più forte della stabilità)





nella superficie rugosa l'energia potenziale in parte è convertita in energia cinetica e in parte è dissipata dall'attrito: prima o poi l'oggetto si ferma.

Ricapitolando

$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$ $\underline{x}$ = vettore di stato $\underline{u}$ = vettore degli ingressi

$f(\underline{0}, \underline{u}) = 0$ $\underline{0}$ è punto di equilibrio con ingresso $\underline{u}^* \to$ costante

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{u} \in \mathbb{R}^m$

$f: \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^n$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\underline{0}$ è inoltre punto di equilibrio stabile se per qualunque $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$: $\|\underline{x}(0)\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon$

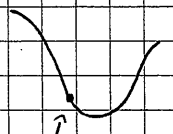
$\underline{0}$ è punto di equilibrio asintoticamente stabile se è stabile e $\|x(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} \underline{0}$

La definizione di stabilità si deve a Lyapunov

Tale definizione riguarda lo stato di equilibrio rispetto alle perturbazioni del sistema in prossimità dell'equilibrio, le quali dipendono dalle condizioni iniziali.
Dato un sistema, esso può avere più di un punto di equilibrio, alcuni stabili altri instabili. Scriveremo ora le equazioni dinamiche nell'intorno di un punto di equilibrio.

Dinamica nell'intorno dei punti di equilibrio

$C(sI-A)^{-1}b$



come posso descrivere questa funzione in un intorno di tale punto? → Serie di Taylor

$g(x)$ derivabile un numero sufficiente di volte

$g(x_0) = g_0$

$\delta x = x - x_0$

$$g(x) = g_0 + \frac{d}{dx} g \Big|_{x=x_0} \cdot \delta x + \frac{d^2}{dx^2} g \Big|_{x=x_0} \delta x^2 + \dots$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\delta \underline{x} = \underline{x}(t) - \underline{0} = \underline{x}(t)$

$\delta \underline{u} = \underline{u}(t) - \underline{u}^*$ (OSS.: se $u^* = 0 \Rightarrow \delta \underline{u} = \underline{u}(t)$)

$$\dot{\underline{x}}(t) \simeq \underline{f}(\underline{0}, \underline{u}^*) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Big|_{\underline{x}=\underline{0},\, \underline{u}=\underline{u}^*} \cdot \underline{x}(t) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} \Big|_{\underline{x}=0,\, \underline{u}=u^*} \cdot \delta \underline{u}(t)$$

(Serie di T. bloccata al I ordine)

$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}$ é una matrice quadrata di dimensione $n \times n$ → Matrice Jacobiana

$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}$ non é una matrice quadrata, bensì rettangolare con n righe e con m colonne.

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{x}(t) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} \cdot \underline{u}(t)$$

$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$ $\quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^m$ → forma standard dei sistemi lineari stazionari (i sistemi lineari non esistono in natura ma descrivono piuttosto bene le eq. dinamiche in un intorno del punto di equilibrio).

$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$ $\quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^m$

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}, \underline{u}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}, \underline{u}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

→ Matrice di funzioni (valutata in $x=0$ e $u=0$, cioé all'equilibrio)

↓

la Jacobiana diventa una matrice di numeri

La stessa cosa faccio per $\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}$ che sarà una matrice $n \times m$

$y(t) = g(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$ Se $\underline{x} = \underline{0}$, $\underline{u} = \underline{0}$ punto di equilibrio

$$\Rightarrow y(t) \cong g(\underline{0},\underline{0}) + \left.\frac{\partial g}{\partial \underline{x}}\right|_{\substack{\underline{x}=0\\ \underline{u}=0}} \cdot \underline{x}(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial \underline{u}}\right|_{\substack{x=0\\ \underline{u}=0}} \cdot \underline{u}(t)$$

$y(t) - g_0 \rightarrow$ scostamento rispetto all'uscita di equilibrio

$y(t) = C\,\underline{x}(t) + D\,\underline{u}(t)$ Sistemi propri ma non strettamente propri

D ↓ matrice di solito = 0

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \end{cases}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\underline{u} \in \mathbb{R}^m \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$\underline{y} \in \mathbb{R}^p \quad C \in \mathbb{R}^{p\times n}$

Il nostro obbiettivo è trovare l'evoluzione di $x(t)$ nel tempo. Ho bisogno delle condizioni iniziali:

$\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ vettore (di numeri reali) delle condizioni iniziali

$\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$t_0 = 0$ (il sistema è stazionario)

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{At}\cdot \underline{x}_0}_{\text{Evoluzione libera dello stato}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{\text{Evoluzione forzata dello stato}} \qquad (e^{At} \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

= Evoluzione dello stato (la somma è dovuta alla linearità del sistema)

Evoluzione libera dello stato: è presente solo se le condizioni iniziali sono diverse da 0.

Evoluzione forzata dello stato: dipende dalle matrici A e B e dal vettore d'ingresso u. Non dipende dalle condizioni iniziali. È = 0 se u = 0

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$e^{At} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad e^{At} \triangleq I_n + A\cdot t + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{6}(At)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(At)^k$

sviluppo di Taylor di e^x, considerando che davanti alla x ho una matrice come coeff. moltiplicativo

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2} + \ldots = A\cdot e^{At}$$

↓ fino a che il nuovo termine è abbastanza piccolo da essere trascurato

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}\underline{x}_0}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{C\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{\text{Risposta forzata}}$$

Risposta libera: come l'evoluzione libera dipende dalle C.I.

Risposta forzata: come l'evoluzione forzata non dipende dalle condizioni iniziali

Spieghiamo la dimensione di A, B, C

A: il numero di righe di A deve essere uguale alle dimensioni del vettore a cui eguaglio il prodotto, stessa cosa per il numero di colonne $\Rightarrow A = n \times n$ moltiplicata per il vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ restituisce $\dot{\underline{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$

B: per lo stesso motivo $\Rightarrow B = n \times m \cdot \underline{u} \in \mathbb{R}^m = \dot{\underline{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$

MASTER COPY Tel 050 831226 Cell. 368 9837745