MATEMATICA GENERALE - CORSO A

30/09/2019

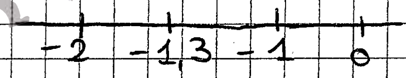
$f(x) = \lfloor x \rfloor$ parte intera di x

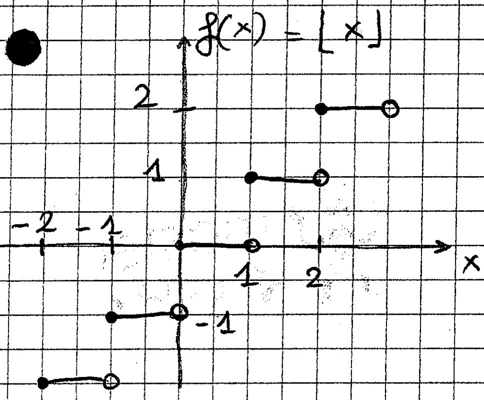
- f associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ il numero intero più grande che non supera x.

<u>Esempi</u>:

$\lfloor 5 \rfloor = 5 \qquad \lfloor 5{,}3 \rfloor = 5 \qquad \lfloor 5{,}999 \rfloor = 5$

$\lfloor 0{,}2 \rfloor = 0 \qquad \lfloor -1{,}3 \rfloor = -2$

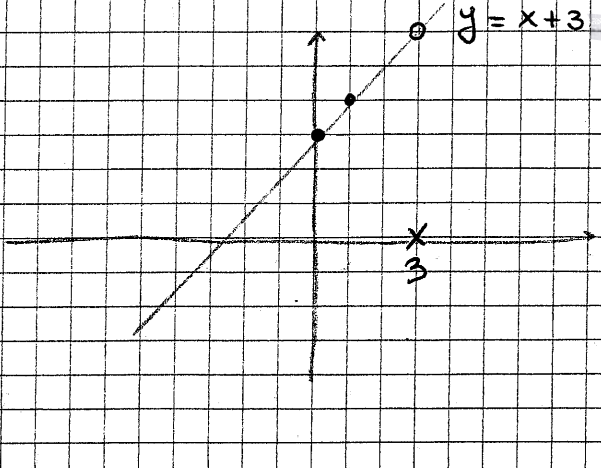


- 

$f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3} \qquad C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0\} = \{x \neq 3\}$

- $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = x+3 \qquad \boxed{x \neq 3}$

Il grafico di f è dato da:



-

Siamo interessati a capire il comportamento di f vicino a $x=3$.

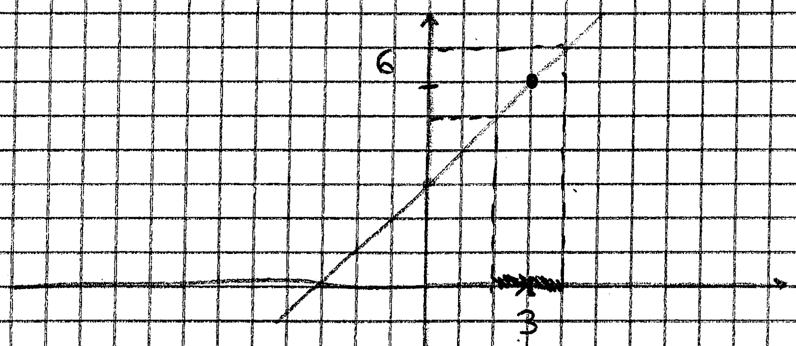
$f(4)=7$ $\quad f(3,5)=6,5$ $\quad f(3,1)=6,1$ $\quad f(3,01)=6,01$

$f(2)=5$ $\quad f(2,5)=5,5$ $\quad f(2,9)=5,9$ $\quad f(2,99)=5,99$

Mano a mano che x si avvicina a $x=3$, i corrispondenti valori $f(x)$ si avvicinano a 6.
Diremo che per x che tende a 3, $f(x)$ tende a 6 o equivalentemente diremo che il limite di $f(x)$ per x che tende a 3 è uguale a 6 e scriveremo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

"vicino" = stare in un intorno



Definizione di limite

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per X. Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se per ogni intorno U di ℓ, esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) \in U$ $\quad \forall x \in V \cap X$ $\quad x \neq x_0$.

Definizione alternativa

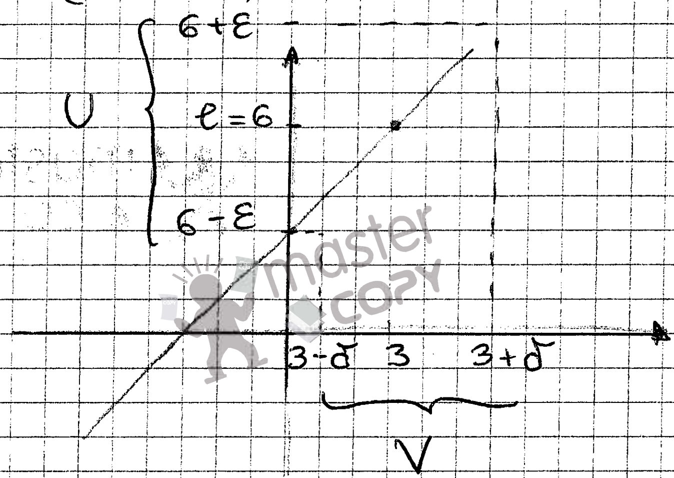
Sia $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_0$ punto di accumulazione per X.

Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0$ esiste
(raggio intorno di ℓ)

$\delta > 0$ tale che $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

(raggio intorno di x_0)

- $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \quad x \neq x_0$



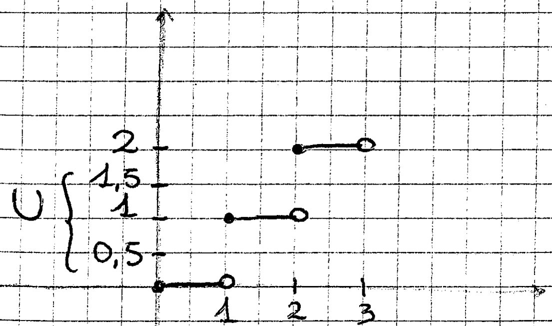
- Non tutte le funzioni hanno limite ma se esiste, il limite e' unico.

Teorema: Sia $f: X \to \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}$ x_0 punto di accumulazione per X.

Se esiste il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ questo e' unico.

ESEMPIO:

- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ $\quad \lim_{x \to 2} \lfloor x \rfloor$ non esiste



Possibili candidati come limiti sono 1 o 2.

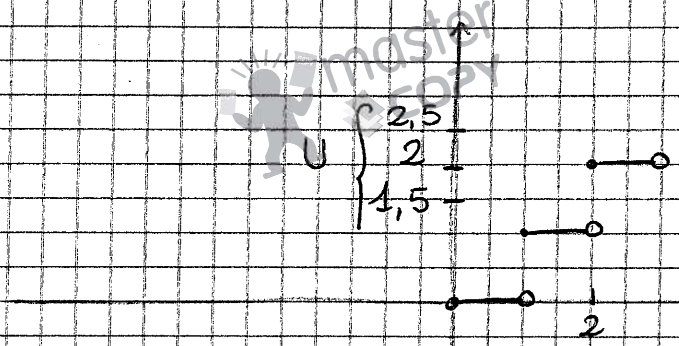
Stabiliamo se $\lim_{x \to 2} \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow$ Poiche' per ogni $x > 2$

- $\lfloor x \rfloor = 2$ non esiste un intorno di $x = 2$ tale che $0,5 < f(x) < 1,5$ in ogni punto dell' intorno di $x = 2$ $x \neq 2$.

Tutti i punti a destra di $x=2$ hanno un valore di f che va fuori dell'intorno $(0{,}5\ ,\ 1{,}5)$.

In modo analogo possiamo verificare che 2 non è il limite di $\lfloor x \rfloor$ per x che tende a 2.

$$\cancel{\lim_{x \to 2} \lfloor x \rfloor = 2}$$



Il problema ce l'ho adesso per $x<2$

→ quindi:

$$\lim_{x \to x_0} \lfloor x \rfloor = \nexists$$

Possiamo parlare di limite destro e limite sinistro.

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}$ x_0 punto di accumulazione per X.

Diremo $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in \underbrace{(x_0, x_0 + \delta)}_{\text{INTORNO DESTRO}} \cap X$$

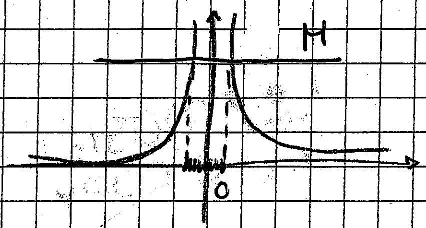
Analogamente: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ se ...

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap X$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad C.E. = \{ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \}$



$f(1) = 1$

$f\left(\frac{1}{10}\right) = 100$

Mano a mano che x si avvicina a $x_0 = 0$, il valore di f aumenta sempre di più.

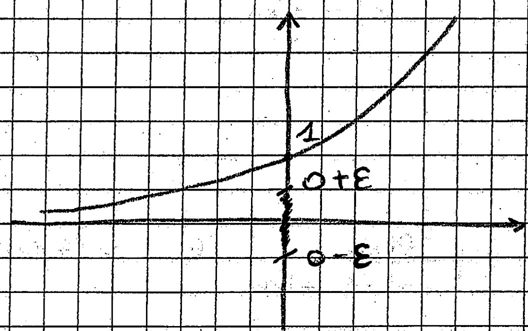
Diremo che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}$ x_0 punto di accumulazione di x_0. Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ se $\forall M > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) > M$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$
$x \neq x_0$

$f(x) < -M$

$f(x) = e^x$



$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tale che $\forall x < -M$ si ha:

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$