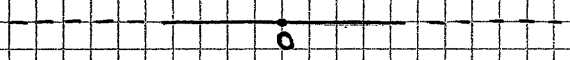
FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

• RETTA DI UNA VARIABILE REALE

I NUMERI REALI SONO I NUMERI NATURALI, RELATIVI, LE FRAZIONI (N. RAZIONALI) E NUMERI IRRAZIONALI. VENGONO RAPPRESENTATI CON IL SIMBOLO $\mathbb{R}$

QUESTI NUMERI VENGONO RAPPRESENTATI ATTRAVERSO UNA RETTA ORIENTATA, CIOÈ UNA RETTA FORMATA DA UN PUNTO D'ORIGINE, I VALORI CHE SI TROVANO A DESTRA DEL PUNTO D'ORIGINE SARANNO MAGGIORI DI 0 E VICEVERSA A SINISTRA.



TRA LA RETTA E L'INSIEME DEI NUMERI REALI SI CREA UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA, CIOÈ DIREMO CHE, DATO UN NUMERO REALE POSSO TROVARE UN PUNTO SULLA RETTA CHE LO RAPPRESENTA E VICEVERSA

INTERVALLI → SONO DEI SEGMENTI DI RETTA FORMATI DA 2 ESTREMI (DX E SIN.)

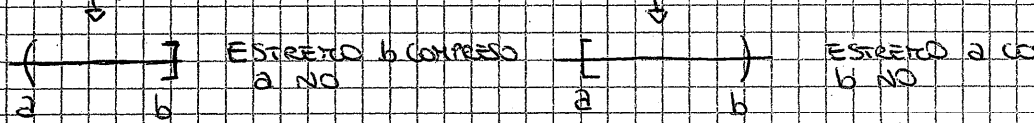
1. INTERVALLI LIMITATI, ASSUMONO FORME DIFFERENTI A SECONDA CHE GLI ESTREMI DEL SEGMENTO SIANO COMPRESI OPPURE NON COMPRESI:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}; \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$$

(APPARTIENE, TALE CHE)



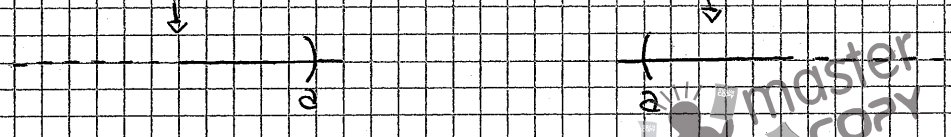
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}; \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$



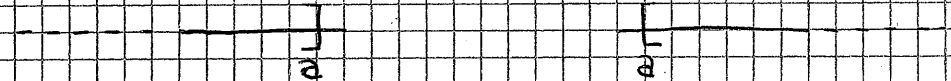
SI CHIAMANO INTERVALLI LIMITATI PERCHÉ SIANO IN GRADO DI RACCHIUDERLI IN UN INSIEME

2. INTERVALLI ILLIMITATI

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}; \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \qquad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$



IL SEGNO INFINITO NON PUÒ MAI FAR PARTE DELL'INTERVALLO POICHÉ NON È UN NUMERO REALE.

SI CHIAMANO INTERVALLI ILLIMITATI PERCHÉ NON SI HANNO 2 ESTREMI COME PER GLI INTERVALLI LIMITATI, MA 1 SOLO ESTREMO (UN NUMERO)

master copy

INTORNO (CIRCOLARE) DI CENTRO $x_0 \in \mathbb{R}$ E RAGGIO δ (DELTA) È UN INTERVALLO DEL TIPO

$$I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$$

CI DÀ L'AMPIEZZA DELL'INTORNO

ESEMPI:

- $(4,6)$ È L'INTORNO DI 5 DI RAGGIO 1
- $(0,2)$ È L'INTORNO DI 1 DI RAGGIO 1

GLI ESTREMI NON SONO MAI COMPRESI NELL'INSIEME, UN INTORNO NON È ALTRO CHE UN INTERVALLO, PUÒ ESSERE ANCHE RAFFIGURATO:

$I(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ → SIGNIFICA CHE DEVO PRENDERE TUTTI I NUMERI CHE DISTANO DA x_0 PER UN CERTO DELTA (RAGGIO) ESCLUSI GLI ESTREMI

$|x - x_0|$ RAPPRESENTA LA DISTANZA TRA I 2 PUNTI

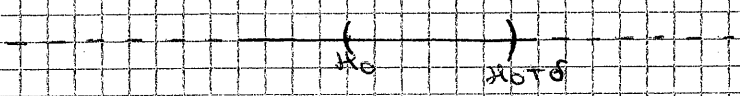
↳ DA CUI POI SI RICAVA:

$$I(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$



1. INTORNO DESTRO DI $x_0 \in \mathbb{R}$ E RAGGIO δ È UN INTERVALLO DI TIPO

$$I^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$$



IN QUESTO CASO x_0 NON APPARTIENE AL SUO INTORNO DESTRO DI RAGGIO δ.

2. INTORNO SINISTRO DI $x_0 \in \mathbb{R}$ E RAGGIO δ È UN INTERVALLO DEL TIPO

$$I^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0), \delta > 0$$



IN QUESTO CASO x_0 NON APPARTIENE AL SUO INTORNO SINISTRO DI RAGGIO δ.

PUNTO INTERNO $x_0 \in A$ È PUNTO INTERNO DI A (UN INSIEME) SE ESISTE UN INTORNO DI x_0 CONTENUTO IN A, QUINDI POSSIAMO DIRE CHE UN PUNTO È INTERNO QUANDO CI SI PUÒ SPOSTARE DI POCO DA QUEL PUNTO MA SI RIMANE SEMPRE DENTRO ALL'INTERNO DELL'INSIEME

ESEMPI:

- 3 È UN PUNTO INTERNO PER L'INSIEME $[2,5]$
- TUTTI I PUNTI $2 < x < 5$ SONO PUNTI INTERNI PER $[2,5]$
- 2 NON È UN PUNTO INTERNO PER L'INSIEME $[2,5]$ PERCHÉ È L'ESTREMO DELL'INTERVALLO
- SE CONSIDERIAMO L'INSIEME $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$ 0 NON È UN NUMERO INTERNO DI A PERCHÉ NON APPARTIENE AD A

PUNTO DI FRONTIERA IL PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$ È UN PUNTO DI FRONTIERA DI A SE OGNI INTORNO DI x_0 CONTIENE PUNTI DI A E PUNTI NON APPARTENENTI AD A.

ESEMPI:

- 5 È UN PUNTO DI FRONTIERA DELL'INSIEME $[1,5]$
- 4 È UN PUNTO DI FRONTIERA DELL'INSIEME $(4,7]$
- 6 NON È UN PUNTO DI FRONTIERA DELL'INSIEME $[4,8]$
- 7 È L'UNICO PUNTO DI FRONTIERA DELL'INSIEME $(7,+\infty)$
- $A = (3,9) \cup \{12\}$; 3, 9 e 12 SONO I PUNTI DI FRONTIERA

↳ NON È SPECIFICATO CHE UN NUMERO DI FRONTIERA DEVE ESSERE PER FORZA CONTENUTO NELL'INTERVALLO

NOTA BENE!

- UN PUNTO INTERNO NON PUÒ ESSERE DI FRONTIERA E VICEVERSA
- UN PUNTO INTERNO DI UN INSIEME APPARTIENE SEMPRE AD A
- UN PUNTO DI FRONTIERA DI UN INSIEME PUÒ ANCHE NON APPARTENERE AD A

PUNTO DI ACCUMULAZIONE x_0 È PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A SE PER OGNI INTORNO I DI x_0 SI HA: $A \cap I \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

↓ NON DEVE PER FORZA APPARTENERE AD A

OVVERO PRENDENDO L'INSIEME A, PRENDENDO L'INTORNO DEL PUNTO x_0, FACCIAMO L'INTERSEZIONE (NON DIRE ANDARE A TROVARE GLI ELEMENTI CHE SONO COMUNI AD A E ALL'INTORNO I) E GUARDIAMO SE A ED I HANNO PUNTI IN COMUNE, SE L'UNICO PUNTO IN COMUNE FOSSE x_0 NON SI PRENDE IN CONSIDERAZIONE.

↓ A INTERSECATO L'INTORNO MENO IL PUNTO x_0

PUNTO ISOLATO $x_0 \in A$ È UN PUNTO ISOLATO DI A SE ESISTE UN INTORNO I DI x_0 TALE CHE $A \cap I = \{x_0\}$. UN PUNTO ISOLATO DEVE PER FORZA APPARTENERE AD A

↓ DEVE PER FORZA APPARTENERE AD A

ESEMPI:

- 6 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER L'INSIEME $(6,9]$ PERCHÉ SE FACESSIMO L'INTORNO DI 6, TUTTI I NUMERI DI SINISTRA NON APPARTERREBBERO ALL'INSIEME, MENTRE QUELLI DI DESTRA SÌ. LO STESSO VALE PER IL 9
- $A = (3,9) \cup \{12\}$; 3, 9 e 12 SONO I TRE PUNTI DI FRONTIERA.

  $3 \leq x \leq 9$ SONO PUNTI DI ACCUMULAZIONE, 12 È UN PUNTO ISOLATO E NON È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE
- $A = [-5,7]$ $-5 \leq x \leq 7$ SONO I PUNTI DI ACCUMULAZIONE, NON ESISTONO P. ISOLATI

NOTA BENE!

- I PUNTI INTERNI DI UN INSIEME SONO PUNTI DI ACCUMULAZIONE
- I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI UN INSIEME A POSSONO APPARTENERE O MENO AD A
- UN PUNTO DI FRONTIERA PUÒ ESSERE O UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE O UN PUNTO ISOLATO
- UN PUNTO ISOLATO NON PUÒ ESSERE DI ACCUMULAZIONE E VICEVERSA
- UN PUNTO ISOLATO APPARTIENE SEMPRE ALL'INSIEME

INSIEME APERTO SE OGNI PUNTO DELL'INSIEME A È INTERNO AD A, CIOÈ SE TUTTI I SUOI PUNTI SONO INTERNI

ESEMPI:

✓ $(a \quad b)$ È UN INSIEME APERTO PERCHÉ TUTTI I PUNTI DI A (COMPRESI a e b APPARTENGONO AD A

✗ $[a \quad b)$ NON È UN INSIEME APERTO PERCHÉ a È UN PUNTO DI FRONTIERA

✗ $[a \quad b]$ NON È UN INSIEME APERTO PERCHÉ a e b SONO PUNTI DI FRONTIERA

INSIEME CHIUSO SE TUTTI I SUOI PUNTI DI FRONTIERA SONO CONTENUTI IN A

ESEMPI:

✓ $[a \quad b]$ È UN INSIEME CHIUSO PERCHÉ CONTIENE TUTTI I PUNTI DI FRONTIERA

✗ $(a \quad b]$ NON È UN INSIEME CHIUSO PERCHÉ a NON È UN PUNTO DI FRONTIERA

GLI INSIEMI POSSONO ESSERE: APERTI, CHIUSI O NE APERTI NE CHIUSI

NOTA BENE!

- L'INSIEME VUOTO E INTERO DEI NUMERI REALI SONO INSIEMI SIA APERTI CHE CHIUSI
- $A = (-\infty, 9]$ È UN INSIEME CHIUSO PERCHÉ L'UNICO PUNTO DI FRONTIERA È IL 9, CHE È COMPRESO IN A, QUINDI L'INSIEME COMPRENDE TUTTI I PUNTI DI FRONTIERA E SI DICE CHIUSO
- $A = (-\infty, 9)$ È UN INSIEME APERTO PERCHÉ L'UNICO PUNTO DI FRONTIERA È IL 9 E NON È CONTENUTO IN A

INSIEME LIMITATO SE ESISTE UN INTORNO DI CENTRO L QUALUNQUE E RAGGIO FINITO CHE LO CONTIENE, OVVERO LO POSSIAMO RACCHIUDERE IN UN INTORNO DI RAGGIO FINITO

INSIEME ILLIMITATO SE NON È LIMITATO

ESEMPI:

- $[4, 10]$ È UN INSIEME CHIUSO E LIMITATO
- $(4, 10)$ È UN INSIEME APERTO E LIMITATO
- $[4, +\infty)$ È UN INSIEME CHIUSO E ILLIMITATO
- $(-\infty, 5)$ È UN INSIEME APERTO E ILLIMITATO
- $A = [3, 10] \cup (12, +\infty)$ È UN INSIEME ILLIMITATO NE CHIUSO NE APERTO

master COPY

INSIEME CONVESSO SE PRESI DUE PUNTI DI A, IL SEGMENTO CHE LI UNISCE È TUTTO CONTENUTO NELL'INSIEME STESSO

λ = LABDA È UN NUMERO COMPRESO FRA 0 E 1, PUÒ ASSUMERE QUALSIASI VALORE ORA, ED INDIVIDUA UN PUNTO DEL SEGMENTO

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A, \forall \lambda \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in A$$

$\forall$ = PER OGNI

SCEGLI QUALUNQUE PUNTO ALL'INTERNO DEL SEGMENTO PERCHÉ AL VARIARE DI LABDA TROVERÒ TUTTI I PUNTI DEL SEGMENTO

SCEGLI ARBITRARIAMENTE I PUNTI DENTRO A

NOTA BENE!

- IN $\mathbb{R}$, GLI INSIEMI CONVESSI SONO TUTTI E SOLI GLI INTERVALLI DI $\mathbb{R}$

- FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE A VALORI REALI

FUNZIONE È UNA ~~REGOLA O REGOLA~~ CHE AD OGNI ELEMENTO DI UN INSIEME $\mathbb{R}$, DETTO DOMINIO, ASSOCIA UNO ED UN SOLO ELEMENTO DI UN INSIEME $\mathbb{Y}$, DETTO CODOMINIO.

ESEMPIO:

INSIEME DI PARTENZA $\mathbb{R}$ → GRUPPO DI AMICI:

INSIEME DI ARRIVO $\mathbb{Y}$ → SERIE TV

LAURA	BREAKING BAD
PIETRO	CASA DI CARTA
MARIA	SHERLOCK
ANTONIO	THE BIG BOOM THEORY
LUCIA	DON MATTEO
RICCARDO	I GRIFFIN
LUIGI	STAR TREK
PAOLA	IL TRONO DI SPADE

IN QUESTO CASO, LA NOSTRA FUNZIONE f, ASSOCIA AD OGNI PERSONA CHE FA PARTE DEL GRUPPO DI AMICI LA SUA SERIE TV PREFERITA.

PER LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE A VALORI REALI ABBIAMO:

- $\mathbb{R}$ È UN SOTTOINSIEME DEI NUMERI REALI → QUINDI $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ → $\mathbb{R}$ CONTENUTO IN $\mathbb{R}$

- $\mathbb{Y}$ È UN SOTTOINSIEME DEI NUMERI REALI → QUINDI $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}$ → $\mathbb{Y}$ CONTENUTO IN $\mathbb{R}$

LEGGE O REGOLA È UN'ESPRESSIONE ALGEBRICA

ESEMPIO n°1:

$$f(x) = x^3 + 2x + 7$$

$x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$

QUAL È IL VALORE CHE f ASSUME SE $x = 4$?

$$f(4) = 4^3 + 2(4) + 7 = 64 + 8 + 7 = 79$$

ESEMPIO n°2:

UN COMMERCIANTE ACQUISTA ALL'INGROSSO UNA MERCE CHE PAGA:

8€ AL Kg PER I PRIMI 200 Kg

6€ AL Kg PER I SUCCESSIVI Kg ACQUISTATI

IL COMMERCIANTE NON PUÒ ACQUISTARE PIÙ DI 500 Kg