Calcolo Numerico

Nel calcolo numerico si cercano:

1) Le procedure da eseguire usando un calcolatore, che determinano scritture posizionali finite di approssimazioni dei numeri richiesti

2) Informazioni sull'errore commesso usando le scritture ottenute per approssimare i numeri reali richiesti

TIPO NUMERO REALE

- oggetti: elementi di $\mathbb{R}$
- operazioni utilizzabili per operare sugli oggetti → operazioni aritmetiche, funzioni elementari, confronti

Numero in Virgola Mobile e Precisione Finita

DEFINIZIONE

Dato un numero reale x diverso da zero e β un numero intero maggiore o uguale a due, allora esiste un unico modo per scrivere x nella forma

$$x = (-1)^s \beta^b \cdot g$$

$$g = \frac{|x|}{\beta^b} \; ; \; s \in \{0,1\} \; ; \; b \in \mathbb{Z} \; ; \; \frac{1}{\beta} \leq g < 1$$

b → esponente di x in base β

g → frazione di x in base β

$$g = 0,c_1 c_2 c_3 \dots \quad c_1 \neq 0$$

→ stringa posizionale di g in base β

master COPY

DEFINIZIONE

$$F(\beta,m) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^s \beta^b \, 0,c_1 \cdots c_m \text{ con } s \in \{0,1\},\ b \in \mathbb{Z},\ c_1,\dots,c_m \text{ cifre in base } \beta \text{ con } c_1 \neq 0\}$$

- si chiama insieme di numeri in virgola mobile (normalizzati) in base β e precisione m
- contiene zero e tutti i numeri razionali per i quali in base β la frazione ha scrittura posizionale di lunghezza non superiore a m

ESEMPIO ($F(10,1)$)

- per ogni numero intero b l'insieme degli elementi positivi di $F(10,1)$ con esponente b è $B_b = \{10^b \cdot 0,1 ; \dots ; 10^b \cdot 0,9\}$
- è simmetrico rispetto a zero
- gli elementi B_b sono ordinati
- l'insieme ha infiniti elementi



PROPRIETÀ DI $F(\beta,m)$

1) è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$
2) è numerabile e ordinato (conseguenza di 1)
3) è simmetrico rispetto a zero
4) zero è l'unico punto di accumulazione
5) $\sup F(\beta,m) = +\infty$, $\inf F(\beta,m) = -\infty$

FUNZIONI SUCCESSORE E PREDECESSORE

$G(\xi)$ primo elemento di $F(\beta,m)$ a destra di ξ → SUCCESSORE

$\pi(\xi)$ primo elemento di $F(\beta,m)$ a sinistra di ξ → PREDECESSORE

DISTRIBUZIONE DEGLI ELEMENTI DI $F(\beta, m)$

$$G(\xi) - \xi = \beta^{b-m} \Rightarrow \frac{G(\xi) - \xi}{\beta^b} = \beta^{-m}$$

β^{-m} → costante

β^b → ordine di grandezza

$G(\xi) - \xi$ → distanza tra elementi positivi consecutivi

Quindi il rapporto tra la distanza e l'ordine di grandezza è una costante che dipende solo da β e m

ESPONENTE LIMITATO E ELEMENTI DENORMALIZZATI

$F(\beta, m, b_{min}, b_{max})$ è l'insieme di numeri in virgola mobile normalizzati in base β e precisione m con esponente limitato tra b_{min} e b_{max}

$Fd(\beta, m, b_{min}, b_{max})$ contiene anche gli elementi denormalizzati

$$x = (-1)^s \cdot \beta^{b_{min}} \cdot 0,0c_2 \dots c_m$$

- Dato che $F(\beta, m, b_{min}, b_{max})$ si ottiene da $F(\beta, m)$ eliminando gli elementi con esponente non adeguato, esso è un <u>insieme finito</u> di elementi
- Dato che $Fd(\beta, m, b_{min}, b_{max})$ si ottiene da $F(\beta, m, b_{min}, b_{max})$ aggiungendo gli elementi denormalizzati, è un <u>insieme finito</u> di elementi
- $Fd(\beta, m, b_{min}, b_{max})$ include zero che si ottiene come $0 = (-1)^s \cdot \beta^{b_{min}} 0,0 \dots 0$, cioè scegliendo $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$

master COPY

Funzione Arrotondamento

L'approssimazione di numeri reali con elementi di M è fornita tramite la funzione arrotondamento

ELEMENTI DI M ADIACENTI A UN NUMERO REALE

Dato un numero $x \notin M$

ξ_- elemento di M ottenuto da x troncandolo alla m-esima cifra

$\xi_+ = \beta(\xi_-)$

si ha che $\boxed{\xi_- < x < \xi_+}$

quindi ξ_- e ξ_+ sono gli elementi di M adiacenti a x

FUNZIONE ARROTONDAMENTO

- Sia x un numero reale, l'arrotondato di x in M è $rd(x)$, cioè il numero di M più vicino a x
- In caso x sia equidistante da due elementi di M l'ambiguità si scioglie:
  1) RTTE (Round Ties to even): tra i due elementi di M si sceglie quello con cifra meno pari
  2) RTTA (Round Ties to away): si sceglie quello più lontano da zero

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE ARROTONDAMENTO

1) **non è invertibile**: esistono infiniti numeri che hanno lo stesso arrotondato quindi non è possibile determinare univocamente x a partire da $rd(x)$
2) **è dispari**: $rd(-x) = -rd(x)$
3) **è non decrescente**: $x \leq y \Rightarrow rd(x) \leq rd(y)$
4) $rd(x) = x \Leftrightarrow x \in M$
5) se $M = F(\beta, m)$ allora $rd(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

master COPY

FUNZIONI ERRONE

Funzione errore assoluto $\delta(x) = rd(x) - x$ ↗ dispari

Funzioni errore relativo $\varepsilon(x) = \frac{rd(x) - x}{x} = \frac{\delta(x)}{x}$ ↗ pari, $x \neq 0$

$\eta(x) = \frac{rd(x) - x}{rd(x)} = \frac{\delta(x)}{rd(x)}$ ↗ pari, $rd(x) \neq 0$

STIME DELLE FUNZIONI ERRONE

$|\delta(x)| \leq \frac{1}{2} \beta^{1-m}$; $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2} \beta^{1-m}$; $|\eta(x)| \leq \frac{1}{2} \beta^{1-m}$

PRECISIONE DI MACCHINA $u = \frac{1}{2} \beta^{1-m}$

- Quindi le stime sugli errori in funzione della precisione di macchina:

$$|\varepsilon(x)| \leq u$$

$$|\eta(x)| \leq u$$

$$|\delta(x)| \leq u|x| \quad \vee \quad |\delta(x)| \leq u\,|rd(x)|$$

- Più è piccola la quantità di precisione di macchina, quanto più è stringente la limitazione sull'errore relativo commesso arrotondando numeri reali

- Le funzioni errore relativo sono limitate
- La funzione errore assoluto è illimitata



ARROTONDAMENTO e PERTURBAZIONI

$$\begin{cases} rd(x) = x + d & |d| \leq u\,|x| \\ x = rd(x) + d & |d| \leq u\,|x| \end{cases}$$ perturbazione additiva

$$\begin{cases} rd(x) = (1+\varepsilon) \cdot x & |\varepsilon| \leq |u| \\ x = (1+t)\, rd(x) & |t| \leq u \end{cases}$$ perturbazione moltiplicativa