CAPITOLO 0

(NUMERI IN VIRGOLA MOBILE, PRECISIONE)

(il SIGNIFICATO della VIRGOLA dipende dall'esponente)

$$F(\beta,m)=\{0\}\cup\{x\in\mathbb{R} \text{ t.c. } x=(-1)^s\beta^b\cdot 0,c_1\dots c_m\}$$

SIMMETRICO RISPETTO A ZERO

con $s\in\{0,1\}$, $b\in\mathbb{Z}$, $c_1,\dots,c_m$ cifre in base β, $c_1\neq 0$ (ELEMENTI NORMALIZZATI)

$\rightarrow q=\frac{|x|}{\beta^b} \Rightarrow$ poiché $\beta^{b-1}\le|x|<\beta^b$ $\quad \beta^{-1}\le q<1$

Introduciamo questo TIPO "REALIZZABILE" perché abbiamo l'esigenza di ricondurre il TIPO "IDEALE" (quindi numeri REALI) a un tipo elaborabile da parte del calcolatore (numeri in VIRGOLA MOBILE e PRECISIONE FINITA).

Scrivere $1/10$, utilizzando il tipo in virgola mobile, in base $\beta=10$ e $\beta=2$.

$x=\frac{1}{10}$ $\quad \beta^{b-1}\le x<\beta^b$ $\quad b=0$ $\quad \frac{1}{10}\le\frac{1}{10}<1$ $\quad s=0$ $\quad x=(-1)^0\cdot 10^0\cdot 0,1$ $\quad (\beta=10)$

Se $\beta=2$ $\quad \frac{1}{16}\le\frac{1}{10}<\frac{1}{8}$ $\quad \frac{1}{2^4}\le\frac{1}{10}<\frac{1}{2^3}$ $\quad b=-3$ $\quad x=(-1)^0\cdot 2^{-3}\cdot 0,c_1c_2c_3\dots$

$$0,c_1c_2c_3\dots=\frac{0,1}{2^{-3}}=\frac{0,1}{1/8}=0,8=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}=0,c_1c_2c_3\dots \Rightarrow \frac{8}{5}=c_1,c_2c_3\dots$$

$$\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}\Rightarrow \underline{c_1=1}$$

$$\frac{3}{5}=0,c_2c_3c_4\dots \Rightarrow \frac{6}{5}=c_2,c_3c_4\dots \Rightarrow \underline{c_2=1}$$

$$\frac{1}{5}=0,c_3c_4\dots \Rightarrow \frac{2}{5}=c_3,c_4c_5\dots \Rightarrow \underline{c_3=0}$$

$$\frac{4}{5}=c_4,c_5c_6\dots \Rightarrow \underline{c_4=0}$$

$\left(\frac{8}{5}\right)=0,c_5c_6c_7\dots$ ricomincia il periodo

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{10}=(-1)^0\,2^{-3}\cdot 0,1100}$$

Se ne deduce che a seconda della scelta della base un numero può avere (un n° di cifre dopo la virgola) una scrittura FINITA o NON FINITA.

$F(\beta,m)$ si può vedere come unione di insiemi PARTIZIONATI $\quad \left[\bigcup_{b\in\mathbb{Z}}(-B_b)\right]\cup\{0\}\cup\left[\bigcup_{b\in\mathbb{Z}}(B_b)\right]$

$\rightarrow \dots;-10^0 0,0;\dots;-10^0 0,1$

$$\left[\dots\right)\left[\dots\right)\left[\dots\right)$$
$$\beta^{b-1}\quad\beta^b\quad\beta^{b+1}$$

Qual è la distanza tra il max della partizione precedente e il min della successiva? β^{b-1}

Infatti: $\left|10^{b-1}\cdot 0,9-10^{b-1}\cdot 0,1\right|=\left|10^b(0,9-0,1)\right|=0,1\cdot 10^b=10^{b-1}$

Proprietà di $F(\beta,m)$:
- $F(\beta,m)\subset\mathbb{Q}$ infatti $(-1)^s\beta^{b-m}c_1\dots c_m$ (sottintesa virgola proposta)
- $F(\beta,m)$ è numerabile e ordinato (infatti lo è $\mathbb{Q}$)
- $F(\beta,m)$ simmetrica rispetto a 0
- 0 è l'unico PUNTO di ACCUMULAZIONE (in ogni suo intorno c'è un elemento che è a $F(\beta,m)$); gli altri sono punti isolati

Es. $\xi_m=\beta^{-m}=0,1\beta^{-m+1}$ $\quad \lim_{m\to+\infty}\xi_m=0$ ← Vintorno di centro 0

Es. $\xi_m=\beta^m\in F(\beta,m)$ $\quad \lim_{m\to+\infty}\xi_m=+\infty$ ← $\sup F(\beta,m)=+\infty$ $\quad \inf F(\beta,m)=-\infty$

$\xi\in F(\beta,m)$ con $\xi\neq 0$

Successore di ξ: $\sigma: F(\beta,m)-\{0\}\to F(\beta,m)-\{0\}$ $\quad \sigma(\xi)=\min\{\vartheta\in F(\beta,m)\mid \vartheta>\xi\}$

Predecessore di ξ: $\pi: F(\beta,m)-\{0\}\to F(\beta,m)-\{0\}$ $\quad \pi(\xi)=\max\{\vartheta\in F(\beta,m)\mid \vartheta<\xi\}$

$$\boxed{\sigma(\pi(\xi))=\xi=\pi(\sigma(\xi))}$$

TEOREMA (distribuzione degli elementi di $F(\beta,m)$) $\quad \boxed{\sigma(\xi)=\xi+\beta^{b-m}=\beta^b(q+\beta^{-m})=(\beta^b\cdot 0,c_1\dots(c_m+1))}$

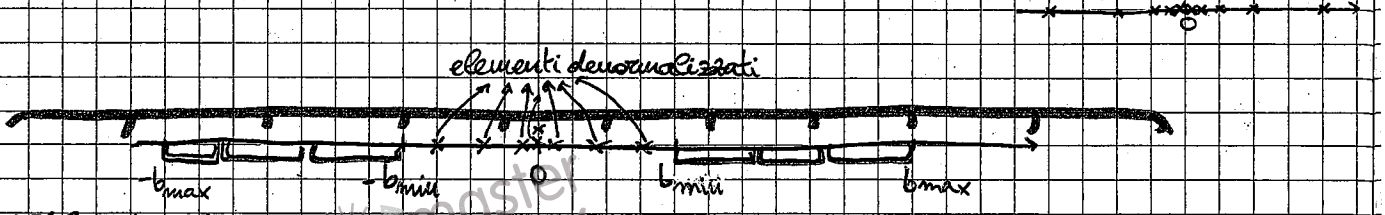
Se $\xi=\max B_b \Rightarrow \sigma(\xi)=(\beta^{b+1}\cdot 0,1)$.

conseguenza del TEOREMA: $\sigma(\xi) - \xi = \beta^{b-m}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\sigma(\xi)-\xi}{\beta^b} = \beta^{-m}}$

$\boxed{\text{DISTANZA tra } \xi \text{ e } \sigma(\xi)} = \beta^{b-m}$

La distanza tra elementi consecutivi di $F(\beta,m)$ è PROPORZIONALE a β^b (ORDINE di GRANDEZZA di ξ). Tanto + siamo lontani dall'origine, tanto più gli elementi di $F(\beta,m)$ sono distanti tra loro.



$F(\beta,m,b_{min},b_{max})$ NUMERI IN VIRGOLA MOBILE con ESPONENTE LIMITATO con precisione m

$F_d(\beta,m,b_{min},b_{max})$ NUMERI IN VIRGOLA MOBILE con ESPONENTE LIMITATO e ELEMENTI DENORMALIZZATI con precisione m

$F(\beta,m)$ NUMERI IN VIRGOLA MOBILE con precisione m

$$F_d(\beta,m,b_{min},b_{max}) = F(\beta,m,b_{min},b_{max}) + \{x=((-1)^s \beta^{b_{min}} 0,0 c_2 \dots c_m)\}$$

$\exists \sigma(0) \wedge \exists \pi(0)$

Si avrà che $F(\beta,m,b_{min},b_{max}) \subset F_d(\beta,m,b_{min},b_{max}) \subset F(\beta,m)$.

n° finito di elementi — n° ∞ di elementi

Esercizi

E1) Determinare l'esponente e la frazione di $\frac{2}{5}$ in base 3.

$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < 3^0$ $\quad b=0$ $\quad q = \frac{2/5}{1} = \frac{2}{5}$ $\quad \left(\frac{2}{5} = 0,\overline{10}\right)$

E2) Indicare quali dei seguenti numeri reali appartengono a $F(2,3)$: $1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \beta, \pi$.

1 $\quad 2^0 \le 1 < 2^1$ $\quad (-1)^0 \cdot 2^1 \cdot \frac{1}{2}$ $\quad (\frac{1}{2}$ in base $2 = 0,1) \Rightarrow (-1)^0 \cdot 2^1 \cdot 0,100 \in F(2,3)$

$\frac{1}{3}$ $\quad 2^{-2} \le \frac{1}{3} \le 2^{-1}$ $\quad (-1)^0 \cdot 2^{-1} \cdot \frac{1/3}{1/2}$ $\quad (\frac{1}{3}$ in base $2 = 0,\overline{01}) \notin F(2,3)$

$-\frac{1}{16}$ $\quad 2^{-4} \le 2^{-4} < 2^{-3}$ $\quad (-1)^1 \cdot 2^{-3} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad (\frac{1}{2} = 0,1) = -1 \cdot 2^{-4} \in F(2,3)$

$\frac{3}{16}$ $\quad 2^{-3} \le \frac{3}{16} < 2^{-2}$ $\quad (-1)^0 2^{-2}$ $\frac{3/4}{3/16}$ $\quad (\frac{3}{4} = 0,101) \Rightarrow (-1)^0 2^{-2} 0,101 \in F(2,3)$

$0 = 0 \in F(2,3)$

$\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \pi \notin F(2,3)$

E3) Dimostrare che $F(2,2) \subset F(2,3)$ $\quad F(2,2) = \{x \in F(2,3) : x = (-1)^s 2^b 0,c_1 c_2 c_3, c_3 = 0\}$

E4) Sia $x = 3,7$ (in base 10). Decidere se $x \in F(2,8)$.

$2^1 \le 3,7 \le 2^2 \Rightarrow x = (-1)^0 \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{37}{40}\right) \rightarrow 0,1110\overline{10100}$ $\quad x \notin F(2,8)$

$37 \quad 32\ 16\ 8\ 4\ 2\ 1 \quad 16\ 32\ 64\ 24\ 16\ 8\ 4\ 2$

E5) Mostrare che tutti gli elementi positivi di $F(2,4)$ con esponente ≥ 4 sono interi, poi determinare:

$\max\{\xi \in F(2,4) \text{ t.c. } \xi > 0 \text{ e } \xi \notin \mathbb{Z}\}$ e $\min\{\alpha \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \alpha \notin F(2,4)\}$

$|x| = 2^b \cdot 0,c_1c_2c_3c_4 = 2^{b-4} c_1c_2c_3c_4$ $\quad 2^3 \cdot 0,1111$ $\quad 2^5 \cdot 0,10001 \Rightarrow 10001$

FUNZIONE ARROTONDAMENTO in M

$rd : \mathbb{R} \to M$ "$rd(x)$" è l'elemento di M più vicino a x.

Se x è equidistante dai 2 elementi di M adiacenti si risolve adottando la tecnica RTTE o RTTA → away (più lontano da zero) even (cifra pari)

$$\xi_- < x < \xi_+ \qquad \xi_+ = \sigma(\xi_-)$$

Arrotondare $x = 1/10$ in $M = (2,2)$.

$x = 2^{-3} \cdot 0,\overline{1100}$ $\quad \xi_- = 2^{-3} 0,11$ $\quad \xi_+ = 2^{-2} 0,10$

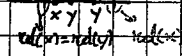
$m = 2^{-3} \cdot 0,111 > x$ $\quad rd(x) = \xi_- = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32} = 0,0975$

$\xi_- \quad m \quad \xi_+ \quad x$

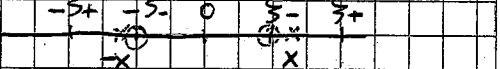
$\frac{2^{-3}0,110 + 2^{-3}(0,110+0,01)}{2} = 2^{-3}\cdot 0,110 + \frac{2^{-3}\cdot 0,01}{2} = 2^{-3}(0,110+0,001) = 2^{-3}\cdot 0,111$

Proprietà di rd:

- non è invertibile
- è dispari $[rd(-x) = -rd(x)]$
- è non decrescente $\quad x < y \Rightarrow rd(x) \le rd(y)$



- $rd(x) = x \iff x \in M$
- Se $M = F(\beta, m)$ allora $rd(x) = 0 \iff x = 0$.



$rd(-x) = -\xi_- = +rd(x)$

Conseguenza della simmetria di M.

E19) Calcolare l'arrotondato di 1/4 in F(3,2)

$\frac{1}{9} \le \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ $\quad x = 3^{-1} \cdot \frac{1/4}{1/3} = 3^{-1} \cdot \frac{3}{4} = 3^{-1} \cdot 0,\overline{20}$ $\quad \xi_- = 0,20 \cdot 3^{-1}$ $\quad \xi_+ = 0,21 \cdot 3^{-1}$

$3^{-1} \cdot m = \frac{[3^{-1}(0,20+0,21)]}{2} \cdot 3^{-1}$

$\Rightarrow rd(x) = \xi_+ = 3^{-1} 0,21 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{27}$ $\quad 3^{-1} \cdot m = \frac{1}{3^{+1}\cdot 3}\left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}}{2}\right) = \frac{13}{54} \cdot 3^{-1} = 0,2\overline{2} \cdot 3^{-1}$

$0,259$ $\quad 0,\overline{25} \to 0,21$

Ho portato in $\beta = 10$

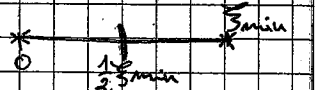
E21) Calcolare l'arrotondato di $2^2 \cdot 0,1011$ in F(10,2)

$4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = \left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{11}{4}\right) = 2,75$ $\quad rd(10^{+1} \cdot 0,275) = 10^{+1} \cdot 0,28$ (RTTA)

(anche RTTE ambiguità → RTTA)

E22) Calcolare l'arrotondato di $\frac{1}{2}\xi_{min}$ in F(2,5,-9,9).

$\xi_{min} = \min\{\xi \in M \mid \xi > 0\} = 2^{-9} \cdot 0,10000$ $\quad \frac{1}{2}\xi_{min} = 0,1 \cdot 2^{-10}$



$rd\left(\frac{1}{2}\xi_{min}\right) = \xi_{min}$ ← RTTA ← RTTE → RTTA

E23) Calcolare l'arrotondato di $\frac{1}{2}\xi_{min}$ in $F_d(2,5,-9,9)$

$\xi_{min} = 2^{-9} \cdot 0,00001 = 2^{-14}$ $\quad \xi_+ = \xi_{min}$ $\quad \xi_- = 0$ $\quad rd(x) = 0$ ← $\frac{1}{2}\xi_{min}$ RTTE

E24) Determinare $\{x \in \mathbb{R} \mid rd(x) = 642\}$. M = F(10,3), rd con RTTE. $(642 = 10^3 \cdot 0,642 \in M)$

$641,5 \le x \le 642,5$ (RTTE) sennò $641,5 \le x < 642,5$ (RTTA)

$\xi_- \quad m_1 \quad \xi_+ \quad m_2 \quad \xi_-$

641 642 643

E25) Determinare $\max\{y \in \mathbb{R} \mid rd(314+y) = 314\}$. M = F(10,3) rd con RTTE. $(314 = 10^3 \cdot 0,314 \in M)$

$313,5 \le x \le 314,5$ $\quad y_{max} = 0,5$

FUNZIONI ERRORE: $\delta(x) = rd(x) - x$ Funzione errore assoluto

$\varepsilon(x) = \frac{rd(x)-x}{x} = \frac{\delta(x)}{x}$, $\eta(x) = \frac{rd(x)-x}{rd(x)} = \frac{\delta(x)}{rd(x)}$ Funzioni err. relativo

con $x \neq 0$ — con $rd(x) \neq 0$

- $\delta(x)$ dispari $\delta(x) = -\delta(-x)$
- $\varepsilon(x)$ e $\eta(x)$ pari

$$\eta(x) = \frac{\delta(x)}{rd(x)} = \frac{\delta(x)}{x}\frac{x}{rd(x)} = \varepsilon(x)\left\{\left[\frac{x}{rd(x)} - 1\right] + 1\right\} = \varepsilon(x)[1-\eta(x)] \Rightarrow \boxed{\varepsilon(x) = \frac{\eta(x)}{1-\eta(x)}}$$

$\neq 1$ per hp o x sarebbe $=0$

Calcolare gli errori commessi approssimando $x = 1/3$ in $F(10,3) = M$

$x = 10^0 \cdot 0,\overline{3}$ $\quad rd(x) = \xi_- = 0,333$ $\quad \delta(1/3) = 0,333 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}$

$$\eta(1/3) = \frac{\delta(1/3)}{0,333} = -\frac{1}{3000}\cdot\frac{1000}{333} = -\frac{1}{999} \qquad \varepsilon(1/3) = \frac{\delta(1/3)}{1/3} = -\frac{1}{1000}$$

TEOREMA (stima delle funzioni errore)

$M = F(\beta, m)$; $x = \beta^b g$ con $g \in \mathbb{R}$, >0

$$|\delta(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{b-m}$$
$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-m}$$
$$|\eta(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{1-m}$$

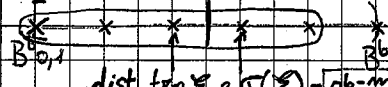
la LIMITAZIONE non dipende da x

$\forall x$
- $|\varepsilon(x)| \leq u$
- $|\eta(x)| \leq u$

$\forall x$
- $|\delta(x)| \leq u|x|$
- $|\delta(x)| \leq u|rd(x)|$

$\frac{1}{2}\beta^{1-m} = u$ Precisione di macchina

Dim.

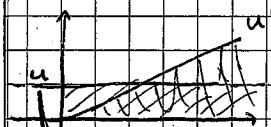


dist tra ξ_- e $\sigma(\xi_-) = \beta^{b-m}$ → quindi $|rd(x) - x| = \delta(x) \leq \frac{\beta^{b-m}}{2}$

la dist. è al più quella con il pto medio

$$|\varepsilon(x)| = \left|\frac{\delta(x)}{x}\right| \leq \frac{\beta^{b-m}}{0,1\beta^b \cdot 2} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-m}$$

quantità + piccola possibile



limitazione uniforme (M è un insieme di numeri in VIRGOLA MOBILE)

Quale limitazione è più stringente sull'errore dell'arrotondato in $F(2,53)$ e $F(10,12)$?

$u_2 = \frac{1}{2}\cdot 2^{1-53} = 2^{-53} \simeq 10^{-16}$ limitaz. più stringente $\qquad u_{10} = \frac{1}{2}10^{1-12} = 5\cdot 10^{-12}$

cioè non implica che l'approssimazione che si ha arrotondando in $F(2,53)$ sia migliore di quella in $F(10,12)$, "a parità di sfortuna l'errore peggiore sarà + piccolo".

Il teorema fornisce una LIMITAZIONE SUPERIORE dell'ERRORE.

$M = F(\beta, m)$

$\forall x \exists d$ (dipendente da x) t.c. $\begin{cases} rd(x) = x + d \\ |d| \leq u|x| \end{cases}$ l'arrotondato si può interpretare come PERTURBAZIONE ADDITIVA di x.

$(d = rd(x) - x = \delta(x))$

$\forall x \exists \varepsilon$ (dipendente da x) t.c. $\begin{cases} rd(x) = (1+\varepsilon)x \\ |\varepsilon| \leq u \end{cases}$ $rd(x)$ è una PERTURBAZIONE MOLTIPLICATIVA di x.

$\forall x \exists t$ (dipendente da x) t.c. $\begin{cases} x = (1+t)rd(x) \\ |t| \leq u \end{cases}$

E28) Siano $x=\frac{5}{4}$ e rd la funzione arrotondamento in $F(2,2)$ con RTTE.
Determinare $rd(x)$ e gli errori assoluto e relativo commessi approssimando x con il suo arrotondato. Verificare le condizioni sugli errori.

$x=\frac{5}{4}$ $\quad 2^0 \le \frac{5}{4} < 2^1$ $\quad x = 2^1 \cdot \frac{5/4}{2} = 2^1 \cdot \frac{5}{8} = 2^1 \cdot 0,101$ $\quad (\xi_-) = 2^1 \cdot 0,10$ $\quad \sigma(\xi_-) = 2^1 \cdot 0,11$

$x = 1,25$ $\quad rd(x) = 2^1 \cdot 0,10 = 1$ $\quad \delta(x) = 0,25 \le \frac{1}{2} 2^{1-2} = \frac{1}{4}$ $\quad rd(x) = \xi_-$ (RTTE) $\quad m = \frac{\xi_- + \xi_+}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{5}{4} = x$

$\varepsilon(x) = \frac{0,25}{1,25} = \frac{1}{5} \le \frac{1}{2} 2^{1-2} = \frac{1}{4}$

Il tipo in virgola mobile e precisione finita è definito dall'insieme M e da funzioni PREDEFINITE, date dall'unione di 3 sottoinsiemi:

- funzioni predefinite CORRISPONDENTI alle FUNZIONI ARITMETICHE: $\oplus, \ominus, \otimes : M \times M \to M$ t.c.
  - $\oplus$ simmetrica, non associativa (arrotondamenti diversi)
  - $\otimes$ simmetrica, non associativa

  anche $\oslash : M \times M - \{0\} \to M$ $\quad \xi_1 \oslash \xi_2 = rd(\xi_1 / \xi_2)$
- funzioni predefinite corrispondenti alle FUNZIONI ELEMENTARI: $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ { f. trigonometrica, f. esponenziale, f. logaritmi, f. radice n-esima ...
  SEN ha solo uno zero $\to rd(\text{sen}\,\xi) = 0$ (sen ne ha infiniti) $\Rightarrow \text{sen}\,\xi = 0 + k\pi$, se $k \neq 0$ $\xi \notin M$

  $F : \Omega \cap M \to M$ t.c. $F(\xi) = rd(\phi(\xi))$
- funzioni predefinite corrispondenti ai CONFRONTI: $<, \le, =, \ge, >$: $M \times M \to \{V, F\}$
  Il confronto avviene esattamente come nei Reali.

al peggio $\varepsilon = u$ (PRECISIONE di MACCHINA)

Le funzioni PREDEFINITE sono definite nel MODO MIGLIORE POSSIBILE, il valore di una f. predefinita è l'elemento di M che dista meno dal RISULTATO ESATTO.

E34) Sia $M = F(10,2)$. Dimostrare, utilizzando le proprietà della funzione rd, che:
1) $\forall \xi$ si ha $\xi \oplus (-\xi) = 0 \longrightarrow rd(\xi + (-\xi)) = rd(0) = 0$
2) $\forall \xi$ $\exists$ un solo α t.c. $\xi \oplus \alpha = 0 \longrightarrow rd(\xi + \alpha) = 0$ → poiché 0 è p.to di accum. dovrà essere $\xi + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\xi$.

PASSAGGIO da P a P*
1) Sostituire a ciascuna costante a valore in $\mathbb{R}$ il suo arrotondato in M.
2) Sostituire a ciascuna operazione aritmetica o f. elementare la corrispondente funzione PREDEFINITA aggiungendo, se è il caso, opportune precedenze tra operatori.

STUDIO dell'ERRORE $\quad y = f(x)$ in $\mathbb{R}$ $\quad y = \phi(x)$ in M
$\forall x \in \Omega$ t.c. $f(x) \neq 0$, si vuole determinare informazioni sull'errore commesso approssimando $f(x)$ con $\phi(x)$, ovvero sulla quantità: $e_t = \frac{\phi(x) - f(x)}{f(x)}$

Algoritmo accurato: $\frac{|e_t|}{\varepsilon} \le Ku$ con K non troppo grande

L'algoritmo ϕ è accurato quando utilizzato per approssimare f in x se $\phi(x)$ è una piccola perturbazione moltiplicativa di $f(x)$ $\longrightarrow \phi(x) = (1+e_t) f(x) \Rightarrow e_t = \frac{\phi(x) - f(x)}{f(x)}$ ($\delta_t = \phi(x) - f(x)$)

Quantitativamente e_t è un multiplo non troppo grande di u.

Nel caso migliore possibile si ha che $\phi(x) = rd(f(x)) \Rightarrow e_t = \frac{rd(f(x)) - f(x)}{f(x)} \le u$

Quando passiamo da P a P* ogni operazione porta un "contributo" (una perturbazione moltiplicativa) del tipo $(1+e_t)$
Raccogliendo questi termini ci accorgiamo che i termini significativi saranno i singoli errori in quanto i prodotti tra gli stessi saranno di ordine trascurabile. Pertanto n operazioni provocheranno un errore $\le |n \cdot u|$ ← precisione di macchina. Se non volessimo trascurare: $|e_t| \simeq nu + u^n$.
↳ n° approssimazioni.