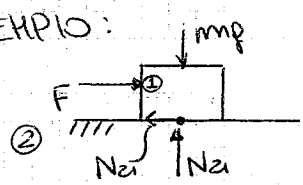
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

# FORZE E MOMENTI DI INERZIA

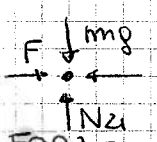
## 1) PUNTO MATERIALE

ESEMPIO:

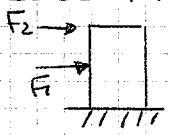



CORPO SU UN PIANO E LO VOGLIO SPOSTARE, LA DIMENSIONE DEL CORPO NON INFLUISCE QUINDI LO POSSO SCHEMATIZZARE COME UN PUNTO. LO SPINGO CON UNA FORZA E SO CHE È SOGGETTO ALLA FORZA PESO. PER ESSERE IN EQUILIBRIO CI SERVONO 2 FORZE UGUALI E OPPOSTE: LA NORMALE DEL PIANO

- SE NON C'È ATTRITO $F = 0$
- ALTRIMENTI $T_{21} = F$

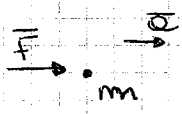



DEVO CAPIRE DOVE APPLICARE LE FORZE PERCHÉ IL RISULTATO PUÒ CAMBIARE




CON $F_1$ OK

CON $F_2$ IL CORPO SI PUÒ RIBALTARE




IL PUNTO MATERIALE DI MASSA $m$ CON FORZA $\bar{F}$ ACCELERA CON ACCELERAZIONE $\bar{a}$ $\quad \bar{F} = m\bar{a}$

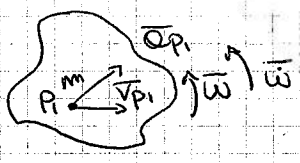
$$\boxed{\bar{F}_i = -m\bar{a}} \rightarrow \text{FORZA DI INERZIA}$$

POSSO RISCRIVERLE IN EQUAZIONI DI QUESTO TIPO:

$\bar{F} - m\bar{a} = \bar{0}$ $\qquad \boxed{\bar{F} + \bar{F}_i = \bar{0}} \rightarrow$ 1° EQUAZIONE CARDINALE DELLA MECCANICA

## 2) CORPO RIGIDO

UN CORPO RIGIDO È COSTITUITO DA UN NUMERO INFINITO DI PUNTI




CORPO RIGIDO DI MASSA $m$

SO LA VELOCITÀ E LA VELOCITÀ ANGOLARE DI UN PUNTO $P_1$. COSÌ SO AUTOMATICAMENTE LA VELOCITÀ DI TUTTI I PUNTI DEL CORPO. SE DERIVO OTTENGO L'ACCELERAZIONE

QUINDI:

$$\sum_{j=1}^{m} m_j = m$$

QUAL È L'ESPRESSIONE DELLA FORZA DI INERZIA CHE DEVO USARE PER OTTENERE L'EQUILIBRIO DEL CORPO?

$$\bar{F}_i = -\sum_{j=1}^{m} m_j \bar{a}_j$$

È SCOMODA DA USARE MA SO CHE È EQUIVALENTE ALLA MASSA TOTALE $\times \bar{a}$ DI UN PUNTO PARTICOLARE CIOÈ IL BARICENTRO INDICATO DAL PUNTO G

$$\bar{OG} = \sum_{j=1}^{m} \frac{m_j \bar{OP_j}}{m}$$ → DERIVATA DELLA POSIZIONE

$$\bar{V_G} - \bar{V_O} = \frac{\sum m_j (\bar{V_j} - \bar{V_O})}{m} = \frac{\sum_m m_j \bar{V_j} - \sum_m m_j \bar{V_O}}{m}$$ → $m\bar{V_O}$ PER QUELLO CHE HO DETTO PRIMA

$$\bar{V_G} = \frac{\sum_m m_j \bar{V_j}}{m} \Rightarrow \sum_m m_j \bar{V_j} = m\bar{V_G} = \bar{Q}$$

SE DERIVO PRIMO E SECONDO MEMBRO OTTENGO CHE INDICANDO $\bar{V_j} = \bar{V}_{P_j}$, $\bar{Q_j} = \bar{Q}_{P_j}$

QUANTITÀ DI MOTO $\bar{Q} = m\bar{V_G}$

DERIVANDO ANCORA OTTENGO CHE

$$\sum m_j \bar{V_j} = \sum m_j \bar{Q_j} = m \cdot \bar{Q_G}$$

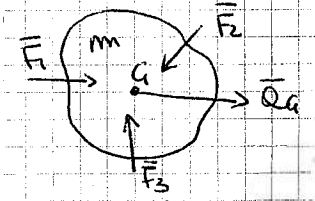
$$\dot{\bar{Q}} = m\bar{Q_G}$$

QUINDI LA FORZA DI INERZIA LA POSSO SCRIVERE COME

$$\bar{F_i} = -m\bar{Q_G}$$
$$\bar{F_i} = -\dot{\bar{Q}}$$ → DI SOLITO SI USA QUESTA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

SE SU UN CORPO AGISCONO PIÙ FORZE:




PER LA PRIMA LEGGE CARDINALE DELLA DINAMICA SO CHE:

$$\sum_{k=1}^{e} \bar{F_k} - m\bar{Q_G} = \bar{0}$$

MOMENTO DELLE FORZE DI INERZIA SARÀ IN FUNZIONE DEL MOMENTO DI INERZIA

1) PUNTO MATERIALE

$\bar{F}$ ↘ P, m

$$\bar{M_{Oi}} = \bar{OP} \times \bar{F}$$
$$\bar{M_{Oi}} = -\bar{OP} \times m\bar{Q}$$
↳ REGOLA DELLA MANO DESTRA E' ENTRANTE (-)

o

2) CORPO RIGIDO

$$\bar{M_{Oi}} = -\sum \bar{OP_j} \times m\bar{Q_j}$$

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO → $\bar{K_O} = \sum \bar{OP_j} \times m_j \bar{V_j}$

DERIVANDO LO RISPETTO AL TEMPO

$$\dot{\bar{K}}_O = \sum (\bar{V_j} - \bar{V_O}) \times m_j \bar{V_j} + \sum \bar{OP_j} \times m_j \bar{Q_j} =$$

SVOLGENDO $\bar{V_j} \times m_j \bar{V_j}$ SONO PARALLELI, QUINDI ZERO

$$= -\bar{V_O} \times \sum m_j \bar{V_j} - \bar{M_{Oi}}$$ ($-\bar{M_{Oi}}$)

ADESSO RICAVO IL MOMENTO DELLE FORZE DI INERZIA

$\bar{M}_{Oi} = -\dot{\bar{K}}_O - \bar{V}_O \times \bar{Q}$

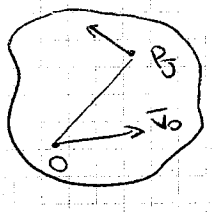
CONFRONTANDOLA CON $\bar{F}_i = -\dot{\bar{Q}}$ → QUESTA NON È SUFFICIENTE PER DETERMINARE IL MOMENTO

$\bar{V}_O \times \bar{Q}$ MOLTE VOLTE È NULLO

- QUANDO IL BARICENTRO G COINCIDE CON IL PUNTO O $\bar{M}_{Gi} = -\dot{\bar{K}}_G$
- OPPURE SE $\bar{V}_O = 0$ ⇒ O È FISSO $\bar{M}_{Oi} = -\dot{\bar{K}}_O$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

3) CORPO RIGIDO NEL PIANO




PRENDO UN PUNTO O CHE È AL CORPO E USO LA I LEGGE CARDINALE DELLA STATICA

$\bar{V}_J = \bar{V}_O + \bar{\omega} \times \overline{OP_J}$

I DUE VETTORI SONO ⊥

$\bar{K}_O = \sum \overline{OP_J} \times m_J (\bar{V}_O + \bar{\omega} \times \overline{OP_J})$

$= \sum m_J \overline{OP_J} \times \bar{V}_O + \sum m_J [(\overline{OP_J} \cdot \overline{OP_J})\bar{\omega} - (\overline{OP_J} \cdot \bar{\omega})\overline{OP_J}]$

$= m\overline{OG} \times \bar{V}_O + \sum m_J \overline{OP_J}^2 \bar{\omega}$

$\boxed{J_O = \sum m_J \overline{OP_J}^2}$ MOMENTO DI INERZIA DEL CORPO RISPETTO AD O

$\bar{K}_O = \bar{J}_O \bar{\omega} + \overline{OG} \times m\bar{V}_O$ POSSO DERIVARLA RISPETTO AL TEMPO

$\dot{\bar{K}}_O = \bar{J}_O \dot{\bar{\omega}} + (\bar{V}_G - \bar{V}_O) \times m\bar{V}_O + \overline{OG} \times m\bar{Q}_O =$

$= \bar{J}_O \dot{\bar{\omega}} + \bar{V}_G \times m\bar{V}_O + \overline{OG} \times m\bar{Q}_O$

LO SOSTITUISCO IN $\bar{M}_{Oi} = -\dot{\bar{K}}_O - \bar{V}_O \times \bar{Q}$ E OTTENGO:

$\bar{M}_{Oi} = -\bar{J}_O \dot{\bar{\omega}} - \bar{V}_G \times m\bar{V}_O + \overline{OG} \times m\bar{Q}_O$

LO SOSTITUISCO IN $\bar{M}_{Oi} = -\dot{\bar{K}}_O - \bar{V}_O \times \bar{Q}$ E OTTENGO:

$\bar{M}_{Oi} = -\bar{J}_O \dot{\bar{\omega}} - \cancel{\bar{V}_G \times m\bar{V}_O} - \overline{OG} \times m\bar{Q}_O - \cancel{\bar{V}_O \times m\bar{V}_G} =$ SI ELIDONO PERCHÉ SONO OPPOSTI

$= -\bar{J}_O \dot{\bar{\omega}} - \overline{OG} \times m\bar{Q}_O$

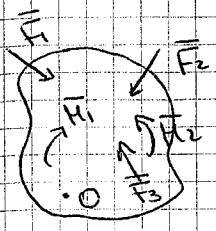
$\boxed{\bar{M}_{Oi} = -\bar{J}_O \dot{\bar{\omega}} - \overline{OG} \times m\bar{Q}_O}$ → PER CALCOLARE IL MOMENTO DI FORZE DI INERZIA DI UN CORPO RIGIDO NEL PIANO

SI PUÒ TROVARE UNA FORMA ANALOGA PER IL BARICENTRO CON $\bar{J}_G$

$\bar{M}_{Oi} = -\bar{J}_G \dot{\bar{\omega}} - \overline{OG} \times m\bar{Q}_G$

$\bar{M}_{Gi} = -\bar{J}_G \dot{\bar{\omega}}$ → $\bar{M}_{Gi}$ LA USO QUANDO IL PUNTO HA $\bar{V}$ E $\bar{Q}$ NULLE

# II EQUAZIONE CARDINALE DELLA MECCANICA




$$\sum_{k=1}^{2} \bar{M}_k + \sum_{k=1}^{3} \overline{OP_k} \times \bar{F}_k + \bar{M}_{oi} = \bar{0}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FORMULE UTILI

FORZA DI INERZIA $\quad \bar{F}_i = -m\bar{a}_a = -\bar{Q}$

MOMENTO DELLE FORZE DI INERZIA

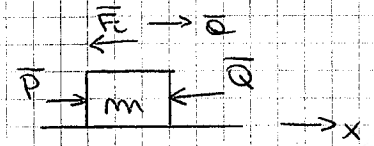
$$\bar{M}_{oi} = -\bar{K}_o - \bar{v}_o \times \bar{Q}$$

$$\bar{M}_{ai} = -J_a \bar{\omega}$$

$$\bar{M}_{oi} = -J_o \bar{\omega} - \overline{OG} \times m\bar{a}_o = -J_a \bar{\omega} - \overline{OG} \times m\bar{a}_a$$

## ESEMPI DI APPLICAZIONI

**CASO 1**




MASSA SU CUI AGISCE UNA FORZA MOTRICE ($\vec{P}$) E UNA RESISTENTE ($\vec{Q}$), SUPPONIAMO CHE NON CI SIA ATTRITO TRA IL CORPO E IL PIANO

SE $P > Q$ → IL CORPO ACCELERA VERSO DX

SCRIVO L'ED. DELLA DINAMICA

$$\bar{P} + \bar{Q} + \bar{F}_i = 0$$

$$\bar{P} + \bar{Q} - m\bar{a} = 0$$ LE PROIETTO LUNGO L'ASSE X ORIZZONTALE

$$P - \bar{Q} - m\ddot{x} = 0$$

PER RISOLVERLA AVRÒ DEGLI ELEMENTI NOTI E DELLE INCOGNITE (È UN'ED. DIFFERENZIALE)

**PROBLEMA DINAMICO DIRETTO**: QUANDO SONO NOTE TUTTE LE FORZE ESTERNE E VOGLIO DET LA LEGGE DEL MOTO

**PROBLEMA DINAMICO INVERSO**: CONOSCO COME SI MUOVE IL CORPO E ALCUNE FORZE E MOMENTI (IN GENERE LE AZIONI RESISTENTI) L'INCOGNITA È LA FORZA MOTRICE PER FARLO MUOVERE CON QUELLA LEGGE

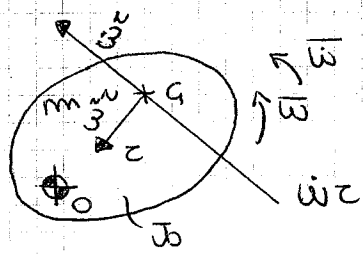
$P - Q = m\ddot{x}$ → $P > Q \Rightarrow \ddot{x} > 0$ ①

→ $P < Q \Rightarrow \ddot{x} < 0$ ②

① ACCELERA NEL VERSO DELLA x

② STA RALLENTANDO

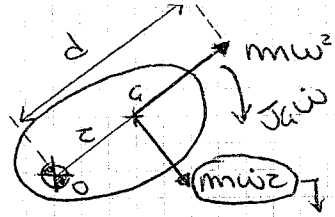
**CASO 2**




$\alpha_G = r \quad \bar{F}_i = -m\bar{a}_G$ DET $\bar{F}_i$

$\bar{a}_G = \bar{\omega} \times \overline{OG} - \omega^2 \overline{OG}$ DAL TEOR DI EULAS

$\omega r$ → È IL MODULO DI $\bar{\omega} \times \overline{OG}$ → VA DA G VERSO O




$\bar{M}_{io}$ ? ($m\omega^2 z$) NON PRODUCE MOMENTO PERCHÉ PASSANTE PER O

COMPONENTE RADIALE

$m\dot{\omega}z$ PERÒ NON DETERMINA TUTTO $\bar{M}_{io}$ SERVE QUALCOS'ALTRO. ANDREBBE BENE SE TUTTA LA MASSA FOSSE CONCENTRATA IN QUELLA ZONA (LO DIMOSTRO)

COMPONENTE TANGENZIALE

$\bar{M}_{oi} = -\bar{J}_o \bar{\dot{\omega}}$

$M_{oi} = J_o \dot{\omega}$

DOVREI IMMAGINARE IL VETTORE PIÙ DISTANTE DA O AD UNA DISTANZA d

$d m \dot{\omega} z = J_o \dot{\omega}$

$$d = \frac{J_o}{mz}$$

A QUEL PUNTO VA BENE CHE $m\dot{\omega}z$ DET. TUTTO IL MOMENTO

ALTRIMENTI POSSO AD USARE LA FORMULA CON $J_G$, OTTENENDO LO STESSO RISULTATO $M_{io} = J_G\dot{\omega} + zm\dot{\omega}z =$

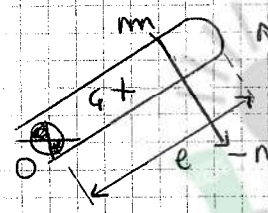
$= \underbrace{(J_G + mz^2)}_{J_o}\dot{\omega}$ → L'HO RICAVATA DA

$M_{io} = J_o\dot{\omega}$ → È LA STESSA FORMULA DI PRIMA, USARE L'UNA O L'ALTRA È INDIFFERENTE

$\bar{M}_{io} = -J_G\bar{\dot{\omega}} - \bar{OG} \times m\bar{\dot{a}}_G =$

$= -J_G\bar{\dot{\omega}} - m(\bar{\dot{\omega}} \times \bar{OG} - \omega^2 \bar{OG})$

**CASO 3**



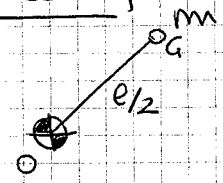

$z = \frac{e}{2}$ $\bar{a}_T$ = e TANGENTE

$J_o = \frac{1}{3}me^2$

$d = \frac{J_o}{mz}$

$d = \frac{\frac{1}{3}me^2}{mz} = \frac{2}{3}e$ → SONO OLTRE G COME IL CASO DI PRIMA

**CASO 4**

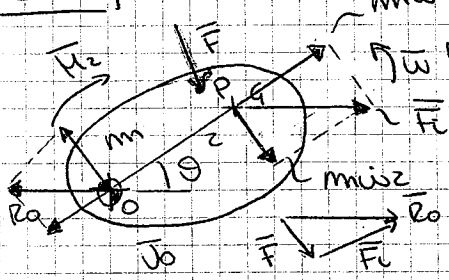



ASTA PRIVA DI MASSA

$J_o = m\,dist^2$ $J_o = m\frac{e^2}{4}$

$d = \frac{m\frac{e^2}{4}}{m\frac{e}{2}} = \frac{e}{2}$ → IN QUESTO CASO LA $\bar{F}_i$ È APPLICATA PROPRIO AL BARICENTRO

**CASO 5**




$\bar{M}_m$ = MOMENTO MOTORE

$\bar{M}_z$ = MOMENTO RESISTENTE DEVE AVERE VERSO OPPOSTO RISPETTO A $\bar{\omega}$

PER QUESTE DUE NON DEVO SPECIFICARE IL POLO.