RIASSUNTI (FORMULARIO) MECCANICA II

- **Equazioni di d'Alembert** $\sum \vec{F}_{est} + \vec{F}_i = \vec{0}$ con $\vec{F}_i = -m\cdot\vec{a}_G$

$\sum \vec{M}_{est,O} + \vec{M}_{i,O} = \vec{0}$ con $\vec{M}_{i,O} = -J_O\vec{\dot{\omega}} - \vec{OG}\wedge m\vec{a}_O = -J_G\cdot\vec{\dot{\omega}}$ se $O\equiv G$ o se O fisso

- **Energia Cinetica** $E_c = \frac{1}{2}mV_O^2 + \frac{1}{2}J_O\omega^2 + \vec{V}_O\cdot m\vec{V}_{GO}$

↳ se O fisso $E_c = \frac{1}{2}J_O\omega^2$

↳ se $O\equiv G$ $E_c = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}J_G\omega^2$

$L_M + L_R + L_P = \Delta E \rightarrow dL_M + dL_R + dL_P = dE$

$dL_M = M_M\,d\theta$ $\quad dL_R = -M_R\,d\theta$

Se J varia (dipende da θ) $\Rightarrow$ $dE = J_O\omega\,d\omega + \frac{1}{2}\dot{J}\omega^2$ (con O fisso)

Molla ↗ elicoidale $F = k\cdot\Delta\ell$; ↘ torsionale $M = k\Delta\theta$

Smorzatore ↗ $F = cV$; ↘ $M = c\omega$

- **Oscillazioni libere a 1 gdL** Applico cond. iniziali nelle situazioni generali per trovare A e φ

Porre sempre il sistema a riposo come origine del sistema di riferimento in modo che $mg = k\Delta\ell_0$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ • Pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{k/m}$ • Smorzamento $\chi = \frac{c}{2\sqrt{k\cdot m}}$

↳ $x = e^{zt}$ $\quad z = -\chi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\chi^2-1}$

- se $\chi > 1$ $x(t) = e^{-\chi\omega_n t}\left(Ae^{\sqrt{\chi^2-1}\,\omega_n t} + Be^{-\sqrt{\chi^2-1}\,\omega_n t}\right)$ Moto aperiodico smorzato
- se $\chi < 1$ $x(t) = e^{-\chi\omega_n t}\cdot D\sin(\omega_s t + \varphi)$ $\quad \omega_s = \omega_n\sqrt{1-\chi^2}$ Moto periodico smorzato
- se $\chi = 1$ $x(t) = e^{-\omega_n t}(A + Bt)$

• oscillazioni forzate a 1 gdL

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$

$x(t) = x_{OM}(t) + x_p(t) \cong x_p(t)$ se $x \neq 0$

A e φ non dipendono dalle condizioni iniziali!
(derivo 2 volte e le inserisco nell'eq.ne)

$x_p(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\chi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$tg\,\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\chi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- derivo, sostituisco nell'eq.ne del moto, separo termini con coseno e seno
- scrivo l'eq.ni; 1 col sin e 1 col cos(ωt)
- elevo al quadrato e sommo
- trovo A e φ

$\cos(\omega t - \varphi) = \cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t$
$\sin(\omega t - \varphi) = \sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi$

• oscillazioni libere a 2gdL

$x_1(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi)$ ← derivo e inserisco nell'eq.ne (in A e B)
$x_2(t) = B\cos(\omega_n t + \varphi)$

- ω_n e ω_{n2} ponendo det dei coeff. = 0
- $\frac{A_1}{B_1}$ e $\frac{A_2}{B_2}$ sostituendo ω_{n1} e ω_{n2} nelle eq.ni (trovo B_1 e B_2 in funzione di A_1 e A_2)

$x_1(t) = A_1\cos(\omega_{n1}t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_{n2}t + \varphi_2)$
$x_2(t) = B_1\cos(\omega_{n1}t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_{n2}t + \varphi_2)$

- trovo $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ con le condizioni iniziali

• oscillazioni forzate a 2gdL

$x_1(t) = A\cos(\omega t)$ ← derivo e inserisco
$x_2(t) = B\cos(\omega t$ → trovo A e B con metodo di Cramer

Metodo di Cramer

dato $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

master COPY

• attrito

$$N = \int_A p \cdot dA \qquad T = \int_A \vec{\tau} \cdot dA$$

($\vec{\tau}$: tensioni nei punti di contatto)

$\varphi < \varphi_A$

(di strisciamento) corpo in moto

- Dinamico: valgono le 3 leggi Coulomb $T = fN$ $f = tg\varphi = \frac{T_{21}}{N_{21}}$

- Statico $T \leq T_{MAX} = f_s N$ La reazione T deve essere tale che la risultante sia interna al cono di attrito

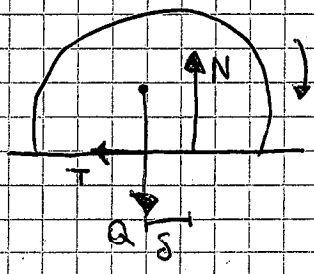
corpo fermo o lss

angolo tra reazione e normale deve essere $\leq \varphi_A$ = angolo di aderenza

statico altrimenti si genera strisciamento

$dL_p = -fN\,ds$ = lavoro perso per attrito

- Di rotolamento $\delta \ll \frac{F \cdot R}{E}$ distribuzione di contatto semiellittico



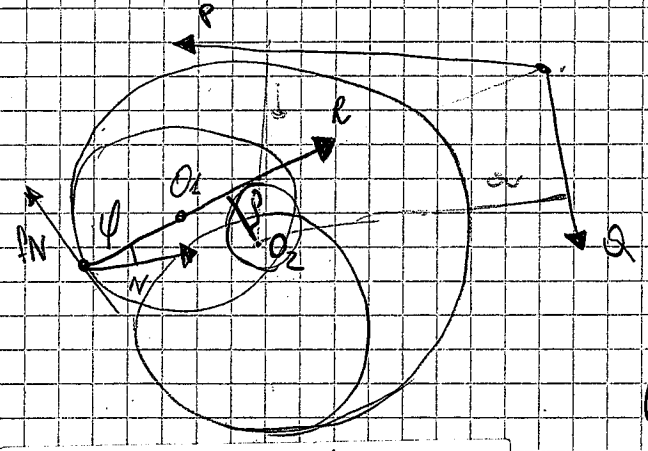
δ = parametro di attrito volvente = spostamento del punto di applicazione di N verso i punti che vengono "schiacciati"

(es. coppie non cilindriche)

$M_f = N \cdot \delta$ = MOMENTO RESISTENTE

$f_v = \frac{\delta}{R}$ = COEFFICIENTE DI ATTRITO VOLVENTE

• COPPIA ROTOIDALE - cerchio di attrito



$\rho = r \cdot \sin\varphi \simeq r \cdot f$

La reazione scambiata tra i due corpi è TANGENTE AL CERCHIO DI ATTRITO (circonferenza di raggio ρ)

(Quando non c'è attrito la reazione passa per l'asse della coppia)

Si presenta in casi di coppie di superfici opposte hanno zone di contatto estremamente limitate che si riducono a punti o segmenti

$$P = \frac{Q_a + P_\rho}{b} \qquad P_0 = \frac{Q_a}{b}$$

$$\sqrt{\frac{Q_a^2}{b^2} + \frac{Q_\rho^2}{b^2} - 2\frac{Q_a Q_\rho}{b}\cos\theta}$$

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{a_v}\sqrt{1 + \frac{Q_\rho^2}{b^2} - 2\frac{Q_\rho}{b}\cos\theta}}$$


master
COPY


master
COPY


master
COPY


master
COPY

• attrito

$$N = \int_A p \cdot dA \qquad T = \int_A \tau \cdot dA$$

(τ: tensioni nei punti di contatto)

$\varphi < \varphi_A$

(si strisciamento) corpo in moto

- Dinamico: valgono le 3 leggi Coulomb $T = fN$ $f = tg\varphi = \frac{T_{21}}{N_{21}}$

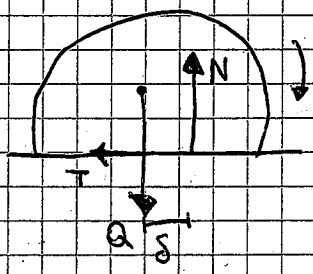
- Statico $T \leq T_{MAX} = f_s N$ corpo fermo o RSS

angolo tra reazione e normale deve essere $< \varphi_A$ = angolo di aderenza

La reazione T deve essere tale che la risultante sia interna al cono di attrito statico altrimenti si genera strisciamento

$dL_p = -fN\,ds$ = lavoro perso per attrito

- Di rotolamento $\delta \propto \frac{F \cdot R}{E}$ distribuzione di contatto semiellittico



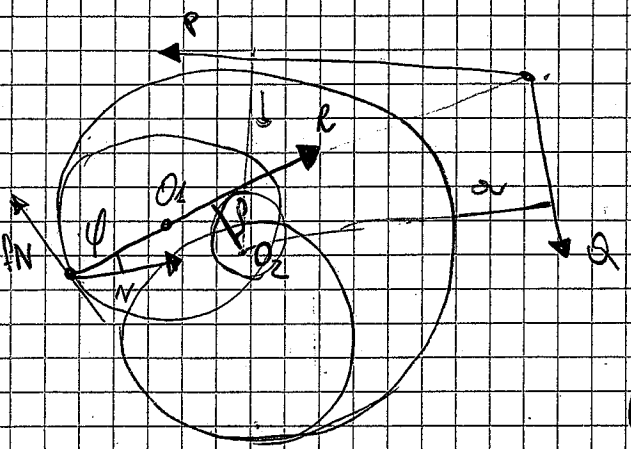
δ = parametro di attrito volvente = spostamento del punto di applicazione di N verso i punti che vengono "schiacciati"

$M_f = N \cdot \delta$ = MOMENTO RESISTENTE

$f_v = \frac{\delta}{R}$ = COEFFICIENTE DI ATTRITO VOLVENTE

(es. coppie non cilindriche)

• COPPIA ROTOIDALE + CIRCOLO di attrito



$\rho = r \cdot \sin\varphi \simeq r \cdot f$

La reazione scambiata tra i due corpi è TANGENTE AL CERCHIO DI ATTRITO (circonferenza di raggio ρ)

(Quando non c'è attrito la reazione passa per l'asse della coppia)

$\vec{O_2}$) $P_b - Q_a - R_\rho = 0$ $\quad P = Q_a + R_\rho \quad P_0 = \frac{Q_a}{b}$

$$R = \sqrt{Q^2 + P^2 - 2PQ\cos\theta} \simeq \sqrt{Q^2 + Q^2\frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}Q_a Q\cos\theta} \quad (P \simeq P_0)$$

$$P = Q_a + Q_\rho\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\cos\theta}$$

$$M = \frac{Q_a}{Q}$$

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{a}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b}\cos\theta}}$$