MECCANICA II

master COPY COPISTERIA

prof. Enrico Ciulli
orario di ricevimento: su appuntamento, su Teams
libri di testo: - E. Ciulli "Elementi di meccanica", Pisa University Press
- E. Funaioli, A. Maggiore, U. Meneghetti "Meccanica applicata alle macchine", Patron Editore (capitolo su vibrazioni a 2 e più gradi di libertà)

esame:
- prova scritta } di persona
- orale: facoltativo }
- orale con esercizi e qualche domanda teorica } via telematica

Programma
- dinamica: • equazioni fondamentali
  • dinamica di sistemi di corpi rigidi
  • dinamica dei sistemi vibranti:
    - vibrazioni libere e forzate di sistemi a 1 GDL
    - vibrazioni libere e forzate di sistemi a 2 GDL
- meccanica dei contatti: • a secco
  • lubrificati
- trasmissioni meccaniche

master COPY

VETTORI

master COPY COPISTERIA

Notazioni:
Vettore: $\vec{F}$, $\underline{F}$, $\mathbf{F}$, $\overline{F}$
Modulo: $|\mathbf{F}|$, F



$\frac{d\,PS}{dt} = V_S - V_P = V_{SP}$ velocità di S rispetto a P

F_{21} forza esercitata da 2 su 1

RICHIAMI DI DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

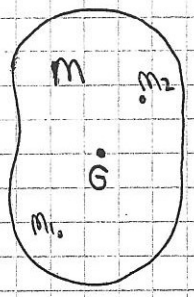
$F = ma$ secondo principio della dinamica

$F - ma = 0$

$F_i = -ma$ forza d'inerzia

$F + F_i = 0$ equazione di D'Alembert

$$m = \sum_{j=1}^{n} m_j \qquad F_i = -\sum_{j=1}^{n} m_j a_j$$



$$F_i = -ma_G \qquad F_i = -\dot{Q}$$

momento della forza di inerzia:

$$M_{io} = -\sum_{j=1}^{n} OP_j \wedge m_j a_j \qquad M_{io} = -\dot{K}_o - v_o \wedge Q$$

momento delle forze di inerzia rispetto a un polo O:

$$M_{io} = -J_o \dot{\omega} - OG \wedge m a_o$$

Relazione tra forza d'inerzia e momento delle forze d'inerzia

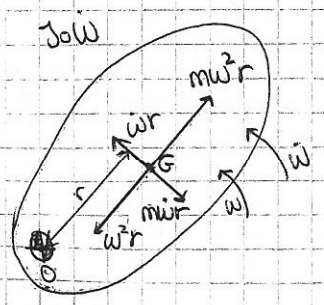
$F_i = -m a_G \qquad M_{io} = -J_o \dot{\omega} = -\dot{K}_o$ polo o coincide con baricentro G

Dimostrazione:

$F_{ix} = -m\ddot{x}_G \hat{i}$ $\qquad M_{io} = -J_z \dot{\omega} = -J_z \dot{\omega} \hat{k}$

$F_{iy} = -m\ddot{y}_G \hat{j}$ $\qquad J_z = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j^2 + y_j^2)$

Si può immaginare F_i applicata in G per il calcolo di M_{io}?



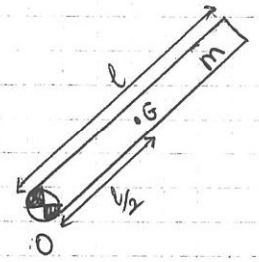
$J_o \dot{\omega} = (J_G + mr^2)\dot{\omega}$

$m\dot{\omega} r$ produce momento $m\dot{\omega} r^2$

$J_o \dot{\omega} \neq m\dot{\omega} r^2$ a meno che $J_G = 0$

$J_G = 0$ quando tutta la massa è concentrata nel baricentro

Es: barretta omogenea



$M_{io} = J_o \dot{\omega} = (J_G + mr^2)\dot{\omega}$ $\quad d = \frac{J_o}{mr}$

$r = \frac{l}{2}$

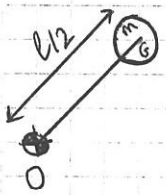
$J_o = \frac{1}{3} ml^2$

$J_G = \frac{1}{12} ml^2$

$d = \frac{J_o}{mr} = \frac{ml^2/3}{ml/2} = \frac{2}{3} l$

$M_{io} = \frac{1}{3} ml^2 \dot{\omega} = \frac{1}{12} ml^2 \dot{\omega} + m\dot{\omega} \frac{l}{2} \frac{l}{2}$

Es: massa concentrata in un punto



$r = \frac{l}{2}$

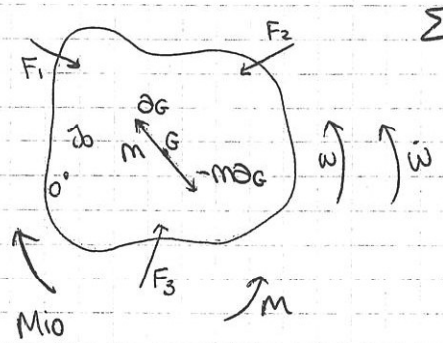
$J_o = m \left(\frac{l}{2}\right)^2$

$J_G = 0$

$d = \frac{J_o}{mr} = \frac{ml^2/4}{ml/2} = \frac{l}{2}$

$M_{io} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\omega}$

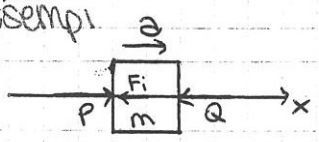
Equazioni di D'Alembert



$\Sigma F = F_{est} + F_i = 0$

$\Sigma M_O = \sum_{j=1}^{n} OP_j \wedge F_j + M_{esto} + M_{io} = 0$

Esempi



$P + Q + F_i = 0$ vettori

$P - Q - m\ddot{x} = 0$ moduli

$\ddot{x} = \frac{P-Q}{m}$ problema dinamico diretto

$P = Q + m\ddot{x}$ problema dinamico inverso

per moti rotatori: $M_{mo} + M_{ro} + M_{io} = 0$ vettori

$M_m - M_r - J\omega = 0$ moduli

$M_m - M_r - J\ddot{\theta} = 0$

ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j v_j^2$$

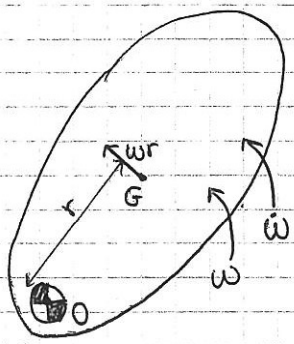
moto piano: $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 + \mathbf{v_0} \cdot m\mathbf{v_{G0}}$

conviene scegliere come punto di riferimento un punto fisso o il baricentro:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2$$

traslazione: $\frac{1}{2} m v_0^2$

rotazione: $\frac{1}{2} J_0 \omega^2$ attorno ad asse passante per O



sfruttando O: $E = \frac{1}{2} J_0 \omega^2$

sfruttando G: $E = \frac{1}{2} m(\omega r)^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$

le 2 espressioni forniscono lo stesso risultato

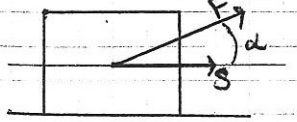
$E = \frac{1}{2}\omega^2 (mr^2 + J_G) = \frac{1}{2} J_0 \omega^2$ teorema assi paralleli

sfruttando baricentro nello spazio:

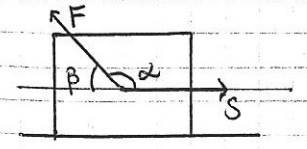
$$E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}(J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{xz}\omega_x\omega_z - 2J_{yz}\omega_y\omega_z)$$

LAVORO E POTENZA

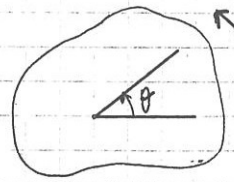
Bilancio energetico



lavoro $L = \underline{F} \cdot \underline{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha$ $L_m > 0$



$L = \underline{F} \cdot \underline{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha = F \cdot s \cdot \cos(\pi - \beta) = -F \cdot s \cdot \cos\beta$ $L_r < 0$



$L = \underline{M} \cdot \underline{\theta} = M \cdot \theta$

potenza: $W = \frac{dL}{dt} = \frac{d(\underline{F} \cdot \underline{S})}{dt} = \frac{d\underline{F}}{dt} \cdot \underline{S} + \underline{F} \cdot \frac{d\underline{S}}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{V}$ (F costante)

$W = \underline{M} \cdot \frac{d\underline{\theta}}{dt} = MW$ caso piano

Equazione di bilancio energetico: $L_m + L_r = \Delta E \quad |L_m| - |L_r| = \Delta E$

Relazione fra equazioni di D'Alembert e di bilancio energetico



$\underline{M_m} + \underline{M_r} + \underline{M_i} = \underline{0}$

$M_m - M_r - J\dot{\omega} = 0$

$dL_m + dL_r = dE \qquad E = \frac{1}{2} J \omega^2$

$M_m d\theta - M_r d\theta = \frac{1}{2} J 2\omega \, d\omega \rightarrow M_m \frac{d\theta}{dt} - M_r \frac{d\theta}{dt} = J\omega \frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega$

$M_m - M_r = J \frac{d\omega}{dt}$

ci sono dei casi in cui il momento di inerzia o la massa equivalente di un sistema di corpi non è costante nel tempo

$E = \frac{1}{2} J_{rid} \omega^2$ J_{rid} = momento di inerzia ridotto di tutto il sistema

$dL_m + dL_r = dE \rightarrow M_m d\theta - M_r d\theta = \frac{1}{2} \omega^2 dJ_{rid} \omega \, d\omega$ divido per dt e semplifico

$\frac{1}{2}\omega^2 dJ_{rid} + \frac{1}{2} J_{rid} 2\omega d\omega$

ottengo: $M_m - M_r = \frac{1}{2} \omega \frac{dJ_{rid}}{dt} + J_{rid} \dot{\omega}$

$dE = \frac{1}{2} J 2\omega \, d\omega = J\omega \underbrace{dt}_{d\theta} \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\dot{\omega}} = -dL_i$ la variazione dell'energia cinetica è l'opposto del lavoro delle forze di inerzia