- Programma:
  - DINAMICA: 1) Equazioni fondamentali.
    2) Dinamica delle macchine.
    3) Dinamica dei sistemi vibranti.
  - CONTATTI: 1) Contatti a secco.
    2) Contatti lubrificati.
  - TRASMISSIONI: 1) Ingranaggi.
    2) Trasmissioni con cinghie.
    3) Trasmissioni flessibili.
    4) Giunti.

MASTER COPY
Tel. 050 83121/26
Cell. 388 9637745

LA DINAMICA

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

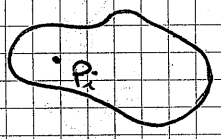
La dinamica può essere anche interpretata come statica. Infatti, se si definisce la forza d'Inerzia come: $\bar{F}_i = -m \cdot \bar{a}$,

l'equilibrio dinamico del sistema deve essere uguale a zero:

$$\bar{F} + \bar{F}_i = \emptyset$$

- Corpo rigido

Tale corpo si muoverà con una certa velocità, velocità angolare... ma i vari punti di quest'ultimo avranno accelerazioni differenti.



- <u>Come si calcola la forza inerziale?</u>

Si fa la sommatoria di tutte le masse m_j soggette alla forza d'inerzia:

$$\bar{F}_i = -\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \bar{a}_j$$

Ovviamente questo non è il metodo più comodo ed efficiente per il calcolo di $\bar{F}_i$. Per semplificare il problema facciamo uso del BARICENTRO

Formula del baricentro con un polo O arbitrario:

$$\bar{OG} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \bar{OP}_j}{m_{TOT}}$$

Applichiamo ad ogni lato la derivata nel tempo, per ottenere dai vettori posizione le rispettive velocità.

2

$$(\bar{v}_G - \bar{v}_O) = \frac{\sum m_j(\bar{v}_j - \bar{v}_O)}{m_{TOT}} = \frac{\sum m_j \bar{v}_j}{m} - \frac{\sum m_j \bar{v}_O}{m}$$

$$m\bar{v}_G - m\bar{v}_O = \sum m_j \bar{v}_j - \sum m_j \bar{v}_O \Rightarrow \underbrace{\bar{Q}_{TOT} = m_{TOT}\bar{v}_G}_{\text{QUANTITÀ di MOTO totale del corpo}} = \sum m_j \bar{v}_j$$

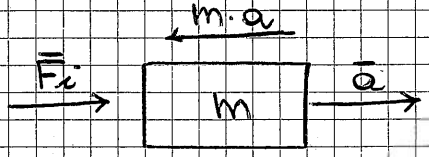
Se derivo nel tempo:

$$\bar{F}_{i_{TOT}} = -m_t \cdot \bar{a}_G = -\dot{\bar{Q}}$$

↳ FORMULA FONDAMENTALE

Stesso direzione ma verso opposto rispetto all'accelerazione del baricentro.

- **Equilibrio dinamico**



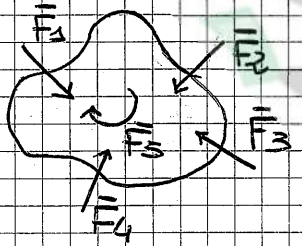
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\sum_{k=0}^{h} \bar{F}_k + \bar{F}_i = \emptyset$$

EQUAZIONE di D'ALAMPERT ($\bar{F}_k$ = forze esterne)

(In presenza di momenti angolari le cose si complicano)

- **Calcolo con Momenti angolari**



$$\sum_{j=0}^{h} \bar{M}_j + \sum_{k=1}^{m} \bar{OP}_k \wedge \bar{F}_k + \bar{M}_{i0} = \emptyset$$

$\bar{M}_{i0}$ = momento delle forze di Inerzia

$$\bar{M}_{i0} = -\sum_{j=1}^{w} \bar{OP}_j \wedge m_j \bar{a}_j = -\bar{OP} \wedge m\bar{a}_p$$

Tale formula del Momento delle forze di Inerzia è poco utile

Definiamo:

$$\bar{K}_O = \bar{OP} \wedge m\bar{v}$$

MOMENTO della QUANTITÀ di MOTO Q rispetto ad un polo "O"

Deriviamo il momento della quantità di moto rispetto al tempo:

$$\dot{\bar{K}}_O = \underbrace{\sum (\bar{v}_{P_j} - \bar{v}_O) \wedge m_j \bar{v}_j}_{\bar{v}_{P_j} \wedge m_j \bar{v}_j \text{ è NULLO perché prodotto fra vettori } //} + \underbrace{\sum \bar{OP}_j \wedge m_j \bar{a}_j}_{\bar{M}_{i0}}$$

è l'opposto del momento delle forze di Inerzia rispetto ad "O"

$$\dot{\bar{K}}_O = -\bar{V}_O \wedge \underbrace{\sum m_j \bar{v}_j}_{Q} - \bar{M}_{iO}$$

Da cui:

$$\bar{M}_{iO} = -\dot{\bar{K}}_O - \bar{V}_O \wedge Q$$

$\bar{M}_{iO} = -\dot{\bar{K}}_O$ se: $\begin{cases} -\ \bar{V}_O = \bar{0} \ \text{(cioè il polo 'O' è fisso)} \\ -\ Q \parallel \bar{V}_O \\ -\ G \equiv O \ \text{(Baricentro = polo 'O')} \end{cases}$

Ripeto formule:

- I^a EQUAZIONE CARDINALE

$$\sum \bar{F}_e + \bar{F}_i = \bar{0}$$

- Forza d'Inerzia

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_G = -\dot{\bar{Q}}$$

- II^a EQ. CARDINALE

$$\sum \bar{M}_{eO} + \bar{M}_{iO} = \bar{0}$$

- Momento delle forze d'Inerzia

$$\bar{M}_{iO} = \underbrace{-\dot{\bar{K}}_O}_{\text{Momento della quantità di moto}} - \bar{V}_O \wedge \bar{Q}$$

Per corpi piani: (Formula più utilizzata)

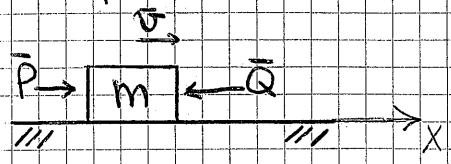
$$\bar{M}_{iO} = \underbrace{-J_O \dot{\bar{\omega}}}_{\text{Momento d'Inerzia rispetto ad O}} \underbrace{- \bar{OG} \wedge m\bar{a}_O}_{\text{Nullo, se O è fisso oppure se O≡G}}$$

$$\bar{M}_{iO} = -J_G \dot{\bar{\omega}} - \bar{OG} \wedge m\bar{a}_G$$

} Formule equivalenti

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- **Esempio: "Corpo che trasla su un piano"**



- **Forze motrici** → a favore del movimento ($\bar{P}$)
- **Forze resistenti** (passive, utili) → contro il movimento ($\bar{Q}$)

$$\bar{P} + \bar{Q} + \bar{F}_i = \bar{0}$$

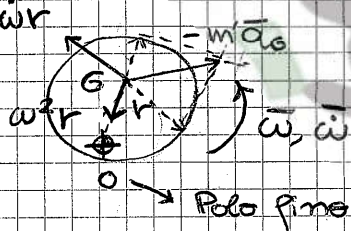
$$\bar{P} + \bar{Q} - m\bar{a}_G = \bar{0} \longrightarrow P - Q - m\ddot{X}_G = 0$$

$$P - Q = m\ddot{X}_G \begin{cases} P > Q, & \ddot{X}_G > 0 \\ P < Q, & \ddot{X}_G < 0 \end{cases}$$

$\bar{F}_i$ ha verso opposto all'accelerazione (non al moto)

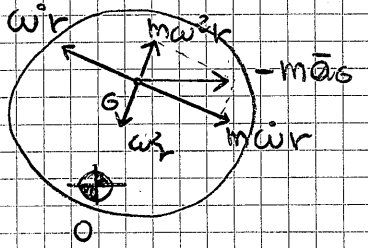
Tale equazione può essere:
- differenziale, se sono note le azioni e $\ddot{X}$ è incognita;
- algebrica, se è noto il movimento ($\dot{X}$) e sono incognite le azioni.

- **Esempio: "Moto con rotazione"**



$\bar{J}_O$ = momento d'Inerzia rispetto al polo O

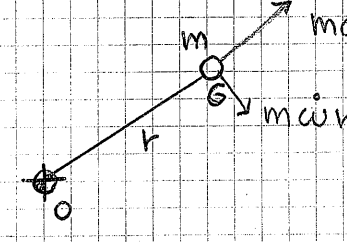
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_G$$

$$\bar{a}_G = \underbrace{\bar{\omega}\dot{} \wedge \overline{OG}}_{\text{cinematica tangenziale}} - \underbrace{\omega^2 \overline{OG}}_{\text{cinem. centripeta}} = \dot{\omega}r - \omega^2 r$$

- Se la mano è caricata in un punto:



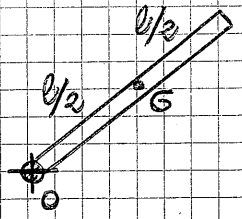
$$\bar{M}_{IO} = m\dot{\omega}r \cdot r = m\dot{\omega}r^2$$

Braccio

$J_O = mr^2$

$\bar{M}_{iO} = mr^2\dot{\omega} = J_O \cdot \dot{\omega}$

• Caso di un asta:



$\bar{M}_{iO} = \underbrace{\frac{1}{3}ml^2}_{J_O}\dot{\omega} \neq m\frac{l^2}{4}\dot{\omega}$] SBAGLIATO !!! Non puoi intendere che tutta la massa sia concentrata in un punto.

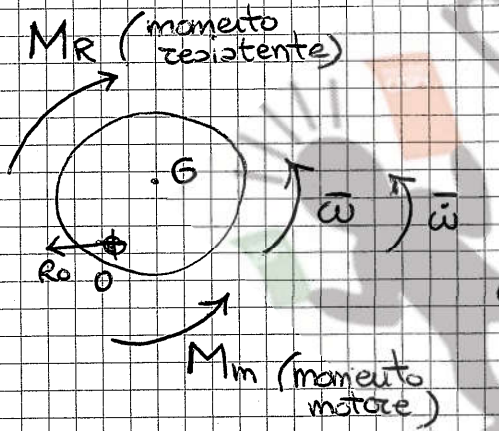
Si pone il momento inerziale intorno al Baricentro, che dipende dalla forma del corpo.

$J_G = \frac{1}{12}ml^2$

$m\frac{l^2}{4}\dot{\omega} + J_G\dot{\omega} = m\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)\dot{\omega} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\omega}$

$J_O = J_G + mr^2$

$\bar{M}_{iO} = J_G\dot{\omega} + mr^2\dot{\omega}$



Rispetto Polo "O":

$\bar{M}_M + \bar{M}_R - J_O\bar{\dot{\omega}} = \bar{0}$

$M_M - M_R - \underbrace{J_O\dot{\omega}}_{\bar{M}_{iO}} = 0$ (per polo O fino O=G)

Rispetto Polo "G":

$\underbrace{\bar{M}_M + \bar{M}_R}_{\text{Tali momenti non dipendono dal polo.}} - J_G\bar{\dot{\omega}} + \bar{GO}\wedge\bar{R}_O = \underline{0}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9937745