- **EQUAZIONI di D'ALEMBERT:** $\sum \bar{F}_{ext} + \sum \bar{F}_i = 0$ con $\bar{F}_i = -m\bar{a}_G$

  $\sum \bar{M}_{Oext} + \sum \bar{M}_{iO} = 0$ con $\bar{M}_{iO} = -J_G \bar{\dot{\omega}}$ se $O \equiv G$ = punto fisso

  $J_O \bar{\dot{\omega}} = (J_G + mr^2)\bar{\dot{\omega}}$

- **ENERGIA CINETICA:** $E = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} J_O \omega^2 + \cancel{v_G \, m v_{GO}}$ se $O \equiv G$

  (traslazione, rotazione)



- **LAVORO** ⇝ bilancio energetico: $L_m + L_r = \Delta E$ $\quad dE = -dL_i$

- **SISTEMI VIBRANTI**

  ↳ molle: $F = K\Delta l$ con $K = [N/m]$

  $M = K\Delta\theta$ con $K = [Nm]$

  ↳ smorzatori viscosi: $F = c\bar{v}$ con $c = [Ns/m]$

  $M = c\omega$ con $c = [Nms]$



- **oscillazioni libere a 1 gdl:** pone il sistema di riferimento sempre nella situazione di riposo, così che $Kl = mg$

  ↳ $[m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0] \rightarrow x(t) = e^{\bar{e}t} \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$

  $\ddot{x} + 2\chi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

  ↳ $z_{1,2} = -\chi\omega_n \pm \sqrt{\chi^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$

  ↳ **PULSAZIONE PROPRIA** $\boxed{\omega_n = \sqrt{K/m} \ [1/s]}$

  ↳ **FATTORE di SMORZAMENTO** $\boxed{\chi = c/c_{cr} = c/2\sqrt{mK}}$

  $\Rightarrow \boxed{\chi\omega_n = c/2m}$

  N.B.: $\omega_n = \sqrt{g/\Delta l}$; sol. part.: $x = mg/K$

  - se $\chi > 1$: $x(t) = e^{-\chi\omega_n t}\left(A e^{\sqrt{\chi^2-1}\,\omega_n t} + B e^{-\sqrt{\chi^2-1}\,\omega_n t}\right)$ **MOTO APERIODICO SMORZATO**

  - se $\chi < 1$: $x(t) = e^{-\chi\omega_n t} \triangleright \sin(\omega_s t + \varphi)$ **MOTO PERIODICO SMORZATO** con $\omega_s = \omega_n\sqrt{1-\chi^2} < \omega_n$; $T = 2\pi/\omega_s$

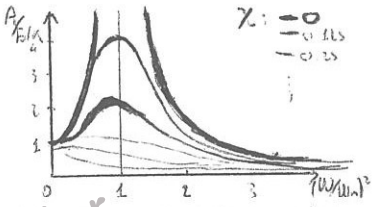
  nel caso di oscillazioni torsionali: $J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + K\theta = 0$; A, B, D, φ sono determinabili dalle condizioni iniziali

- **oscillazioni forzate a 1 gdl:** a regime si ha solo la soluzione particolare

  ↳ $[m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \cos(\omega t)] \rightarrow$ soluzione particolare (a regime): $[x_p(t) = A\cos(\omega t - \varphi)]$ ⇝ A, φ NON dipendono dalle condizioni iniziali ⇝

  ⇝ in generale, sviluppando seni e coseni, si ottiene:

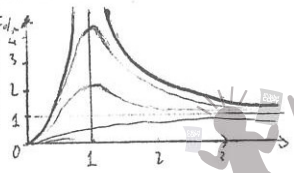
$$\boxed{A = \frac{F_0}{K}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2/\omega_n^2\right)^2 + \left(2\chi\omega/\omega_n\right)^2}}}$$



RISONANZA: quando $\omega = \omega_n$ tanto minore è lo smorzamento, tanto più l'ampiezza delle oscillazioni tende a ∞

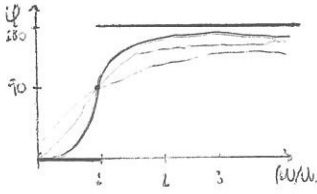
CASO PARTICOLARE: $F \propto \omega^2$

↳ $F = F_0\omega^2\cos(\omega t)$ ⇝ $\boxed{A = \frac{F_0}{m}\,\frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2/\omega_n^2\right)^2 + \left(2\chi\omega/\omega_n\right)^2}}}$





$\boxed{\tan\varphi = \frac{2\chi\,\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}}$



↳ servono ω_n piccole per avere T_0 piccole


master
COPY


master
COPY

• oscillazioni libere a 2 gdl: si hanno come ipotesi di soluzione $\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi) \\ x_2(t) = B\cos(\omega_n t + \varphi) \end{cases}$ ⇝

⇝ derivando e sostituendo nel sistema iniziale si ottiene un sistema omogeneo e per ottenere soluzioni non banali occorre $\det|\text{coeff.}| \neq 0$ → equazione biquadratica → sostituendo ω_{n1} e ω_{n2} nelle equazioni si ottengono i rapporti A_1/B_1 e A_2/B_2 (R_1 e R_2)

↳ si ottengono integrali generali: $\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2) \\ x_2(t) = R_1A_1\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1) + R_2A_2\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2) \end{cases}$ con $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ determinabili dalle condizioni iniziali

↳ se A_1 e $A_2 = 0$ ⇒ MODI PROPRI: 1° MODO PROPRIO: $\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1) \\ x_2(t) = A_1R_1\cos(\omega_{n1}t+\varphi_1) \end{cases}$

2° MODO PROPRIO: $\begin{cases} x_1(t) = A_2\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2) \\ x_2(t) = A_2R_2\cos(\omega_{n2}t+\varphi_2) \end{cases}$

N.B.: $\left[R_1 > 1 \quad R_2 < 0 \right]$

master copy

• oscillazioni forzate a 2 gdl: nell'ipotesi di soluzioni si trascura l'omogenea e si considera quindi solo la particolare, con fase nulla e pulsazione coincidente con quella della forzante →

→ $\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega t) \\ x_2(t) = B\cos(\omega t) \end{cases}$ → derivando e sostituendo nel sistema iniziale si ottiene un sistema non omogeneo; per le soluzioni si utilizza il METODO di CRAMER → l'ampiezza varia con ω della forzante → al denominatore vi è Δ = equazione biquadratica dell'omogenea associata →

→ in generale:
- $\Delta = 0$ e $\omega = \omega_{n1}$ e $\omega = \omega_{n2}$ ⇝ $x_1, x_2 \to \infty$ (RISONANZA)
- $A(0) = B(0)$
- $A = 0$ in $\omega = \sqrt{k_2/m_2}$, ovvero alla pulsazione naturale del sottosistema attaccato a 1: SMORZATORE DINAMICO →
  → 1 è ferma e 2 ha il max locale

• MECCANICA dei CONTATTI → ATTRITO: dipende da rugosità (registrata) superficiale, materiali, cupplli geometrici e ambientali; attorno scambiato da corpi a contatto; si vogliono ridurre per evitare perdite energetiche

↳ ATTRITO STATICO (di aderenza): $\boxed{T \leq T_{MAX} = f_a N}$ dove $\boxed{f_a = \tan\varphi_a}$, φ_a: ANGOLO di ADERENZA o di ATTRITO STATICO

La reazione T deve essere tale che la risultante sia interna al cono di attrito statico, altrimenti si genera spostamento

↳ COEFF. di ATTRITO STATICO → $f < f_a$

↳ ATTRITO di STRISCIAMENTO (o dinamico): $\boxed{T = fN}$ dove $\boxed{f = \tan\varphi}$ COEFF. di ATTRITO di STRISCIAMENTO, φ: ANGOLO di ATTRITO DINAMICO = cost.

La T è nota, si applica F per mantenere una velocità costante ←

↳ Leggi di Coulomb: 1) il coeff. di attrito è indipendente dal carico (T è proporzionale a N);
2) // // // // dall'area apparente di contatto;
3) // // // // dalla velocità di strisciamento

↳ lavoro preso per attrito: $\boxed{dL_p = -fN\,ds}$

↳ ATTRITO di ROTOLAMENTO (senza strisciamento): vale la Teoria di Hertz: deformazione corpi elastici in cui l'ampiezza della zona di contatto cresce al carico e con le dimensioni e decresce all'aumentare del modulo elastico equivalente → distribuzione semiellittica di P;

δ: PARAMETRO di ATTRITO VOLVENTE: spostamento punto di applicazione di N nel verso del moto;

$M_f = N\delta$: momento resistente; → per essere rotolamento senza strisciamento deve essere: $\tan\alpha < f_a$

$\boxed{f_v = \delta/R}$: COEFFICIENTE di ATTRITO VOLVENTE

master COPY

master COPY

• **RENDIMENTO**: da un generico bilancio energetico $L_m - |L_r| - |L_p| = \Delta E$ →

L_m: LAVORO MOTORE (>0) — $|L_r|$: LAVORO RESISTENTE UTILE — $|L_p|$: LAVORO RESISTENTE PASSIVO (PERDITE)

→ in condizioni di regime assunto = periodico $\Delta E = 0$ →

$$\eta = \frac{|L_r|}{L_m} > 0 \text{ e } < 1 \quad \rightsquigarrow \quad \eta = \frac{L_m - |L_p|}{L_m} = 1 - \frac{|L_p|}{L_m}$$

se bilancio energetico in condizioni ideali (senza attriti): $L_{m_0} - |L_r| = 0 \Rightarrow L_{m_0} = |L_r| \Rightarrow \eta = \frac{L_{m_0}}{L_m} < 1$

$= P_0/P = M_0/M$

↳ **MOTO RETROGRADO**: funzionamento inverso della macchina quando le azioni motrici vengono indotte

$$\eta' = \frac{|L'_r|}{L_m} = \frac{|L'_r|}{|L_r|} \cdot \frac{|L_r|}{L_{m_0}} = \frac{P'}{P_0} \quad \text{e in generale:} \quad \eta' = 1/\eta(1-f)$$

con $P' < P_0 < P \rightarrow \eta' < 1$; moto retrogrado possibile se $\eta' > 0$ quindi se $\eta \geq 1/K+1$ con $K = L'_p/L_p$

quindi se attriti bassi e rendimento della macchina elevato

↳ **in serie**: $\eta = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n = |L_{rn}|/L_{m_1}$

↳ **in parallelo**: $\eta = \frac{\eta_1 L_{m_1} + \eta_2 L_{m_2} + \cdots + \eta_n L_{m_n}}{L_m}$

↳ **applicazioni**:

- **COPPIA PRISMATICA**: $\eta = P_0/P = \frac{1 + f \operatorname{cotg}\theta}{1 + f \operatorname{cotg}\alpha}$ — >0 se $\operatorname{cotg}\theta > -1/f \rightarrow \theta \leq \pi - \varphi$; <1 se $\operatorname{cotg}\alpha > \operatorname{cotg}\theta \rightarrow \alpha < \theta$
- **PIANO INCLINATO**: $\eta = \frac{1 + f \operatorname{cotg}\theta}{1 + f \operatorname{cotg}\alpha}$ $\quad \eta' = \frac{1 - f \operatorname{cotg}\alpha}{1 - f \operatorname{cotg}\theta}$
- **COPPIA ELICOIDALE**: $\eta = \tan\alpha / \tan(\alpha + \varphi)$ $\quad \eta' = \tan(\alpha - \varphi)/\tan\alpha$

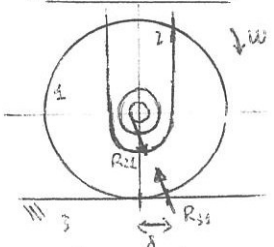
• **CIRCOLO di ATTRITO** (coppia rotoidale): circonferenza concentrica con la coppia stessa, su cui è tangente la forza scambiata tra due corpi

$\rho = rf$: **RAGGIO del CIRCOLO di ATTRITO** dove r è il raggio nominale della coppia di attrito e f il coeff. di attr.

consente valutare da quale lato è tangente la forza considerando che deve generare un momento che si oppone al moto

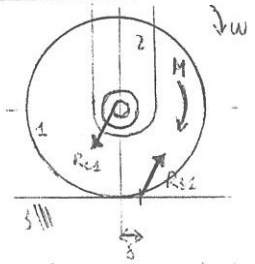
• **RUOTE di un VEICOLO**:

↳ **RUOTA TRASCINATA**



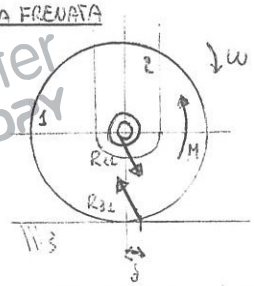
attrito volvente

↳ **RUOTA MOTRICE**



attrito volvente + momento motore

↳ **RUOTA FRENATA**



attrito volvente + momento frenante

• **impuntamento**: si ha quando la retta di applicazione di P incontra quelle delle reazioni R_A e R_B, quindi $f = \infty$; ciò avviene se troppa eccentricità di P, se attrito troppo grande o b piccolo

• **ribaltamento**: avviene quando la risultante di P_0 e Q individua un punto sulla base, per il resto cade