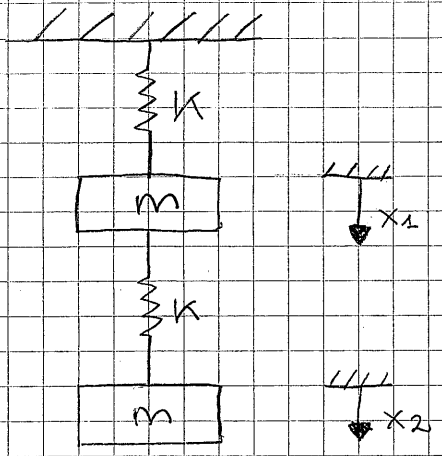
ESERCIZIO (svolto a lezione)



Origine di x_1 e x_2 nella posizione di riposo del sistema

1) ~~Equazione di D'Alembert~~ EQUAZIONE DI D'ALAMBERT

$$\begin{cases} -m\ddot{x}_1 + Kx_1 - K(x_1 - x_2) = 0 \\ -m\ddot{x}_2 - K(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$-m\ddot{x}_2$: forza d'inerzia; $-K(x_2 - x_1)$: forza elastica

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

ESPRESSIONI DELLE PULSAZIONI PROPRIE

2) ~~Espressioni delle pulsazioni proprie~~

Ipotizzo le soluzioni:

$$x_1(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1(t) = -A\omega_n^2 \cos(\omega_n t + \varphi)$$
$$x_2(t) = B\cos(\omega_n t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2(t) = -B\omega_n^2 \cos(\omega_n t + \varphi)$$

(Il coseno posso semplificarlo)

$$m(-A\omega_n^2) + 2KA - KB = 0$$

$$\begin{cases} (2K - m\omega_n^2)A - KB = 0 & (1) \\ -KA + (K - m\omega_n^2)B = 0 & (2) \end{cases}$$

$\det = 0$

$$(2K - m\omega_n^2)(K - m\omega_n^2) - K^2 = 0$$

$$2K^2 - 2Km\omega_n^2 - Km\omega_n^2 + m^2\omega_n^4 + K^2 = 0$$

$$m^2\omega_n^4 - 3Km\omega_n^2 + K^2 = 0$$

$$\omega_{n1/2} = \frac{3Km \pm \sqrt{9K^2m^2 - 4m^2K^2}}{2m^2} = \frac{3Km \pm \sqrt{5}Km}{2m^2}$$

MASTER COPY
Tel. 050 831226
Cell. 328 9837745

$\omega_{n_1} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{K}{m}}$ $\omega_{n_2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{K}{m}}$

3) Espressioni generali della legge del moto

Sostituisco ω_{n_1} e ω_{n_2} nella ①

- $\left(2K - m\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{K}{m}\right)A_1 - KB_1 = 0$
- $\left(2K - m\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{K}{m}\right)A_2 - KB_2 = 0$

Se avessi messo ω_{n_1} ed ω_{n_2} nella ② avrei ottenuto lo stesso.

$B_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_1$

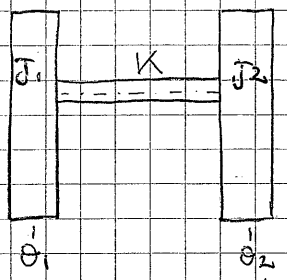
$B_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_2$

$x_1(t) = A_1\cos(\omega_{n_1}t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_{n_2}t + \varphi_2)$

$x_2(t) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_1\cos(\omega_{n_1}t + \varphi_1) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_2\cos(\omega_{n_2}t + \varphi_2)$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9637745

ESERCIZIO (svolto a lezione)



Origine in posizione di riposo del sistema

1) EQUAZIONE di D'ALAMBERT
Equazione di Eulero-Lagrange

$$\begin{cases} -J_1\ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ -J_2\ddot{\theta}_2 - K(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

$J_2\ddot{\theta}_2$: mom. della forza di inerzia; $K(\theta_2 - \theta_1)$: momenti elastici

2) ESPRESSIONI DELLE PULSAZIONI PROPRIE
Espressioni delle pulsazioni proprie

$$\theta_1(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi) \qquad \theta_2(t) = B\cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1(t) = -A\omega_n^2\cos(\omega_n t + \varphi) \\ \ddot{\theta}_2(t) = -B\omega_n^2\cos(\omega_n t + \varphi) \end{cases}$$

(Il coseno posso semplificarlo)

$$\begin{cases} -J_1 A\omega_n^2 + K(A - B) = 0 \\ -J_2 B\omega_n^2 + K(B - A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-J_1\omega_n^2 + K) - KB = 0 \\ -KA + (-J_2\omega_n^2 + K)B = 0 \end{cases}$$

$$\det = 0$$

$$(-J_1\omega_n^2 + K)(-J_2\omega_n^2 + K) - K^2 = 0$$

$$J_1 J_2 \omega_n^4 - J_1 K\omega_n^2 - J_2 K\omega_n^2 + K^2 - K^2 = 0$$

$$J_1 J_2 \omega_n^4 - (J_1 + J_2)K\omega_n^2 = 0$$

$$\omega_{n1} = 0 \qquad \omega_{n2} = \sqrt{\frac{(J_1 + J_2)K}{J_1 J_2}}$$

3) ESPRESSIONI GENERALI DELLA LEGGE DEL MOTO
Espressioni generali della legge del moto

Sostituisco ω_{n1} e ω_{n2}

$$\begin{cases} A_1 K - KB_1 = 0 & \cdot B_1 = A_1 \\ A_2\left(-\frac{(J_1 + J_2)}{J_2}K + K\right) - KB_2 = 0 & \cdot B_2 = -\frac{J_1}{J_2}A_2 \end{cases}$$

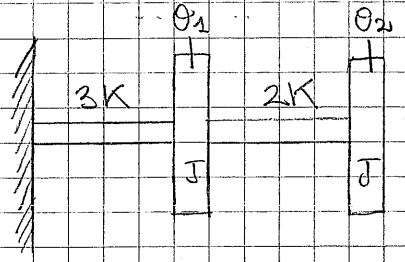
MASTER COPY
Tel. 050 0312126
Cell. 388 9837745

$$\theta_1(t) = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos(\omega_{n2} t + \varphi_2)$$

$$\theta_2(t) = A_1 \cos\varphi_1 - \frac{I_1}{J_2} A_2 \cos(\omega_{n2} t + \varphi_2)$$

www.master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

ESERCIZIO 2 g.l. (2 volani)



Origine in posizione di riposo del sistema

Due volani con momenti d'inerzia J collegati da due molle torsionali (schematizzate come alberi privi di massa) con costanti elastiche K. Non sono presenti smorzatori viscosi.

Equazioni

$$\begin{cases} 3K\theta_1 + 2K(\theta_1 - \theta_2) + J\ddot{\theta}_1 = 0 \\ 2K(\theta_2 - \theta_1) + J\ddot{\theta}_2 = 0 \end{cases}$$

Pulsazioni proprie

$\theta_1(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi)$

$\theta_2(t) = B\cos(\omega_n t + \varphi)$

Derivo 2 volte: $\ddot{\theta}_1 = -A\omega_n^2\cos(\omega_n t + \varphi)$, $\ddot{\theta}_2 = -B\omega_n^2\cos(\omega_n t + \varphi)$

$$\begin{cases} -JA\omega_n^2 + 5KA - 2KB = 0 \\ -JB\omega_n^2 + 2KB - 2KA = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(5K - J\omega_n^2) - 2KB = 0 \\ -2KA + B(2K - J\omega_n^2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad (5K - J\omega_n^2)(2K - J\omega_n^2) - 4K^2$$

$$10K^2 - 5KJ\omega_n^2 - 2KJ\omega_n^2 + J^2\omega_n^4 - 4K^2 = 0$$

$$J^2\omega_n^4 - 7KJ\omega_n^2 - 6K^2 = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{7KJ \pm \sqrt{49K^2J^2 - 24K^2J^2}}{2J^2} =$$

$$= \frac{7KJ \pm 5KJ}{2J^2}$$

$$\omega_{n_1} = \sqrt{\frac{K}{J}} \qquad \omega_{n_2} = \sqrt{6\frac{K}{J}}$$

Matteo Cozzi Tel. 050 831 2126 Cell. 388 9937745