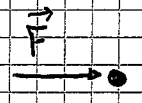
1/03/19

DINAMICA

$\vec{F} = m\vec{a}$



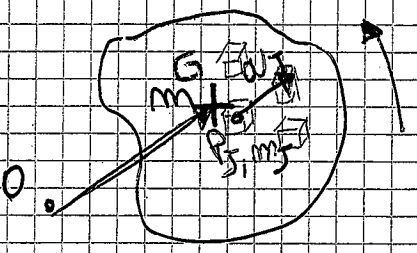
$\vec{F} - m\vec{a} = \underline{0}$ $\qquad$ $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ FORZA D'INERZIA

dalla statica si passa alla dinamica considerando la forza d'inerzia

$\vec{F}_e + \vec{F}_i = 0$

- attive
- reattive

Se ho un corpo rigido che non fa pura traslazione la situazione si complica perché i vari punti avranno diversa accelerazione



distanza tra due punti costante

divido il corpo di massa m in tante masselline: ognuna di di esse avrà una certa accelerazione

La forza d'inerzia la trovo sommando i contributi di tutte le forze d'inerzia

$$\vec{F}_i = \sum -m_j \vec{a}_j$$

G baricentro $\quad \vec{OG} = \dfrac{\sum m_j \vec{OP_j}}{m_{TOT}}$

derivo:

$\vec{V}_j = \vec{V}_{P_j}$

$$\vec{V}_G - \vec{V}_O = \frac{\sum m_j (\vec{V}_j - \vec{V}_O)}{m_{TOT}} = \frac{\sum m_j \vec{V}_j}{m_{TOT}} - \frac{\sum m_j \vec{V}_O}{m_{TOT}}$$

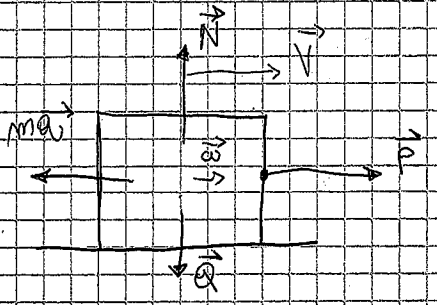
Velocità relativa di G rispetto ad O

massa $\sum m_j = m_{tot}$ e $\vec{V_0}$ si trova in entrambi i membri

Quindi $\vec{V_G} = \frac{\sum m_j \vec{V_j}}{m}$ $\quad \vec{Q} = m\vec{V_G}$

$\vec{a_G} = \frac{\sum m_j \vec{a_j}}{m}$

$\vec{F_i} = -m\vec{a_G}$ $\quad \vec{F_i} = -\dot{\vec{Q}}$



$\vec{P} - m\vec{a} = 0$ equilibrio dinamico

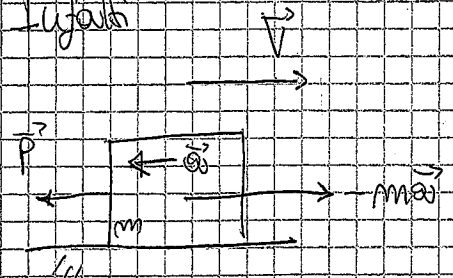
In realtà (equilibrio completo)

$\vec{N} + \vec{Q} + \vec{P} - \underbrace{m\vec{a}}_{+\vec{F_i}} = \vec{0}$

$\begin{cases} N - Q = 0 \\ P - m\ddot{x} = 0 \end{cases}$

Le forze di inerzia sono opposte all'accelerazione e non alla forza!

Infatti



- se applico forza motrice (favorisce il moto) l'accelerazione ha lo stesso verso della velocità
- se invece applico una forza resistenza (si oppone al moto) l'accelerazione ha verso opposto

In questo caso la forza d'inerzia è concorde al movimento perché il corpo si muove da sx e P si oppone ma la F_i è opposta alla $\vec{a}$

- $\ddot{x} > 0$ viene negativa
- $\ddot{x} < 0$ viene positiva

$-P - m\ddot{x} = 0$

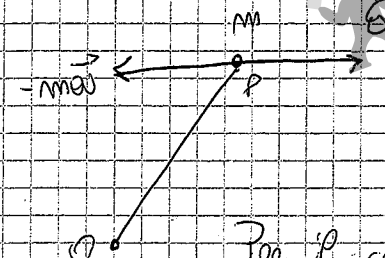
$\ddot{x} = -\frac{P}{m}$

$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_i = 0$ 1° EQUAZIONE cardinale

EQUAZIONE di d'Alembert

$\sum \vec{M} + \sum \vec{OP}_k \wedge \vec{F}_k + \vec{M}_{iO} = 0$ 2° EQUAZIONE CARDINALE

momenti puri — momenti delle forze — momento della forza d'inerzia



$\vec{M}_{iO} = -\vec{OP} \wedge m\vec{a}_P$

Per il corpo rigido sarà $\vec{M}_{iO} = -\sum \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{a}_j$

$(\vec{a}_j \equiv \vec{a}_{(P_j)})$

Momento della quantità di moto rispetto ad un polo O

$\vec{K}_O = \sum \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{V}_j$

Se derivo rispetto al tempo $\dot{\vec{K}}_O = \sum (\vec{V}_j - \vec{V}_O) \wedge m_j \vec{V}_j + \sum \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{a}_j$

$= -\vec{V}_O \wedge \sum m_j \vec{V}_j - \vec{M}_{iO}$

Quindi $\vec{M}_{iO} = -\dot{\vec{K}}_O - \vec{V}_O \wedge \vec{Q}$ Si semplifica scegliendo un polo opportuno rendendo $\vec{V}_O \wedge \vec{Q}$ nullo

$\vec{M}_{iO} = -\dot{\vec{K}}_O$ se $\vec{V}_O = \vec{0}$ (O fisso)

se $O \equiv G$ $(\vec{V}_G \wedge m\vec{V}_G = 0$ perché $//)$

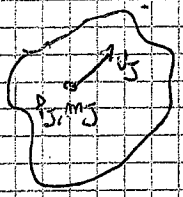
5/03/19

$$\sum \vec{F}_e + \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \vec{F}_i = -\dot{\vec{Q}} = -m\vec{a}_G$$

$$\sum \vec{M}_O + \sum \vec{OP}_j \wedge \vec{F}_j + \vec{M}_{iO} = \vec{0} \qquad \vec{M}_{iO} = -\dot{\vec{K}}_O - \vec{V}_O \wedge \vec{Q}$$

$\downarrow$ $m\vec{V}_G$

$$\vec{K}_O = \sum \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{V}_j$$

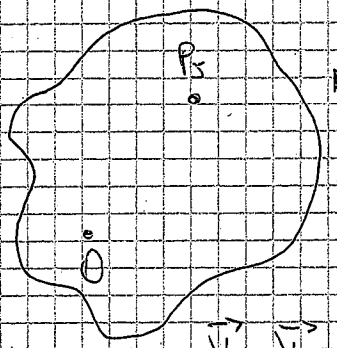


momento quantità di moto rispetto ad un polo O

$$\dot{\vec{K}} = \sum (\vec{V}_j - \vec{V}_O) \wedge m_j \vec{V}_j + \sum \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{a}_j = -\vec{V}_O \wedge \sum m_j \vec{V}_j - \vec{M}_{iO}$$

$\parallel$ $m\vec{V}_G$

$$\vec{M}_{iO} = -\sum \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{a}_j$$



$$\vec{K}_O = \sum \vec{OP}_j \wedge m_j (\vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_j) =$$

$$= \sum \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{V}_O + \sum m_j (\vec{OP}_j \cdot \vec{OP}_j)\vec{\omega}$$

$$- \sum m_j (\vec{OP}_j \cdot \vec{\omega})\vec{OP}_j =$$

$\downarrow$ 0 perché il prodotto scalare è nullo in quanto $\vec{OP}_j$ e $\vec{\omega}$ sono ortogonali

$$= \sum m_j \vec{OP}_j \wedge \vec{V}_O + \left(\sum m_j \overline{OP}_j^2\right)\vec{\omega}$$

$\parallel$

J_O (momento d'inerzia rispetto al polo O: prodotto tra una massa e il quadrato della distanza)

moto piano $\qquad \vec{V}_j = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_j$

$$\dot{\vec{K}} = \sum m_j (\vec{V}_j - \vec{V}_O) \wedge \vec{V}_O + \sum m_j \vec{OP}_j \wedge \vec{a}_O + J_O \dot{\vec{\omega}}$$

il 2° termine $= 0$ perché ho due volte $\vec{V}_O$ che sono parallele

$$\vec{K}_O = \sum m_j \vec{v}_j \wedge \vec{v}_O + m\vec{OG} \wedge \vec{a}_O + J_O \vec{\omega}$$

$$\vec{M}_{iO} = -m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + m\vec{OG} \wedge \vec{a}_O - J_O\vec{\omega} - \vec{v}_O \wedge m\vec{v}_G$$

$$\boxed{\vec{M}_{iO} = -J_O\vec{\omega} + \vec{OG} \wedge m\vec{a}_O}$$

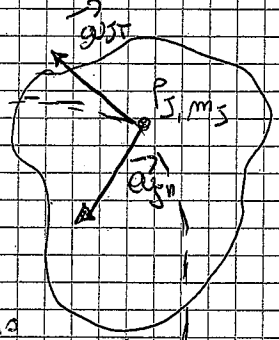
la cosa più comoda è scegliere come polo un punto fisso così la formula è semplificata

$$\Downarrow$$

$$\vec{M}_{iO} = -J_O\vec{\omega} \text{ se } \begin{cases} O \text{ fisso} \\ O \equiv G \\ \vec{OG} \parallel \vec{a}_O \end{cases}$$

$$\vec{M}_{iO} = -\sum \vec{OP_j} \wedge m_j \vec{a}_j = -\sum \vec{OP_j} \wedge m_j (\vec{a}_O - \omega^2 \vec{OP_j} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OP_j})$$

$$\vec{M}_{iO} = -\sum \vec{OP_j} \wedge m_j \vec{a}_O + \sum \vec{OP_j} \wedge m_j \omega^2 \vec{OP_j} + \underbrace{\sum m_j (\vec{OP_j} \cdot \vec{OP_j}) \dot{\vec{\omega}}}_{= -J_O\vec{\omega}} + \sum m_j (\vec{OP_j} / \dot{\vec{\omega}}) \vec{OP_j}$$



$\dot{\vec{\omega}}$ e $\vec{a}_{j,n}$ sempre centripeta (cioè diretta verso il punto su cui si sta ragionando)

0 per lo stesso discorso fatto per il vettore velocità angolare

$$= -m\vec{OG} \wedge \vec{a}_O - J_O\dot{\vec{\omega}}$$

rispetto al baricentro $\vec{M}_{iO} = -J_O\vec{\omega} - \vec{OG} \wedge m\vec{a}_O$

diventa $\vec{M}_G = -J_G\dot{\vec{\omega}}$ perché l'altro termine è nullo (ovvero quando il vettore $\vec{OG}$ si riduce ad un punto)

$$J_O = J_G + mOG^2$$