Equazioni di d'Alembert

- $\Sigma \vec{F}_{est} + \vec{F}_i = \vec{0}$ con $\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}_G$
- $\Sigma \vec{M}_{est,O} + \vec{M}_{i,O} = \vec{0}$ con $\vec{M}_{iO} = -J_O \vec{\omega} - \vec{OG} \wedge m \vec{a}_O$
  $= -J_G \cdot \vec{\omega}$ se $O \equiv G$ o se O fisso

Energia cinetica → $E_c = \frac{1}{2} m v_O^2 + \frac{1}{2} J_O \omega^2 + \vec{v}_O \cdot m \vec{v}_{aO}$

- se O fisso $E_c = \frac{1}{2} J_O \omega^2$
- se $O \equiv G$ $E_c = \frac{1}{2} m v_a^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$

$L_M + L_R + L_p = \Delta E$ → $dL_M + dL_R + dL_p = dE$

$M_M d\theta \quad -M_R d\theta$

se J varia (dipende da θ) allora $dE = J_O \omega d\omega + \frac{1}{2} \dot{J}_O \omega^2$ (con O fisso)

Molla: elicoidale $F = k \cdot \Delta l$; torsionale $M = k \Delta\theta$

Smorzatore: $F = c v$; $M = c \omega$

MASTER COPY
Tel. 030 83...
Cell. 366 9937745

OSCILLAZIONI LIBERE a 1 GDL

Porre sempre il sistema a riposo come origine del SDR in modo che $mg = k \Delta l_0$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ Pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{k/m}$ smorzamento $\chi = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}}$

→ $x = e^{zt}$ $\quad z = -\chi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\chi^2 - 1}$

- se $\chi > 1$ $\quad x(t) = e^{-\chi \omega_n t} \left(A e^{\sqrt{\chi^2-1}\,\omega_n t} + B e^{-\sqrt{\chi^2-1}\,\omega_n t} \right)$ moto aperiodico smorzato
- se $\chi < 1$ $\quad x(t) = e^{-\chi \omega_n t} \cdot D \sin(\omega_s t + \varphi)$ $\quad \omega_s = \omega_n \sqrt{1-\chi^2}$ moto periodico smorzato
- se $\chi = 1$ $\quad x(t) = e^{-\omega_n t} (A + Bt)$

OSCILLAZIONI FORZATE A 1 GDL

$x(t) = x_{om}(t) + x_p(t) \simeq x_p(t)$ se $\chi \neq 0$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$

→ $x_p(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ A e φ non dipendono dalle cond. iniziali! (devi due volte e la inserisci nell'equazione)

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\chi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\chi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

OSCILLAZIONI LIBERE A 2GDL

$x_1(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi)$ — ω_{n1} e ω_{n2} ponendo det dei coefficienti $= 0$

$x_2(t) = B\cos(\omega_n t + \varphi)$ — $\frac{A_1}{B_1}$ e $\frac{A_2}{B_2}$ sostituendo ω_{n1} e ω_{n2} nelle equazioni

$x_1(t) = A_1\cos(\omega_{n1}t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_{n2}t + \varphi_2)$ — trovi $A_1 A_2 \varphi_1 \varphi_2$ con le condizioni iniziali

$x_2(t) = B_1\cos(\omega_{n1}t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_{n2}t + \varphi_2)$

OSCILLAZIONI FORZATE A 2 GDL ($\varphi = 0$)

$x_1(t) = A\cos(\omega \cdot t)$

$x_2(t) = B\cos(\omega \cdot t)$ → trovi A e B con il metodo di Kramer

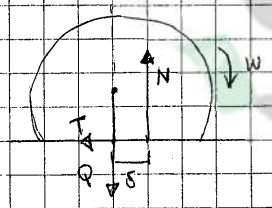
ATTRITO

$N = \int_A p \cdot dA \qquad T = \int_A \tau \cdot dA$

- **DINAMICO**: valgono le 3 leggi di Coulomb $T = fN$
- **STATICO**: $T \leq T_{max} = f_s \cdot N$ La reazione T deve essere tale in modo che la risultante sia interna al cono di attrito statico altrimenti si genera strisciamento

$dL_p = -fN\,ds$ = lavoro perso per attrito

- **DI ROTOLAMENTO**: $a \propto \frac{F \cdot R}{E}$ distribuzione di contatto semiellittica

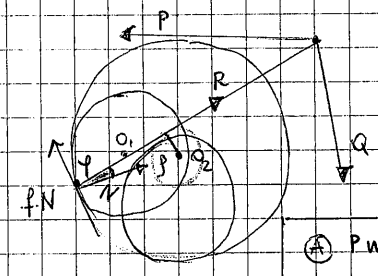


δ = parametro di attrito volvente = spostamento del punto di applicazione di N verso i punti che vengono "schiacciati"

$M_f = N \cdot \delta$ = momento resistente

$f_v = \frac{\delta}{R}$ = coefficiente di attrito volvente

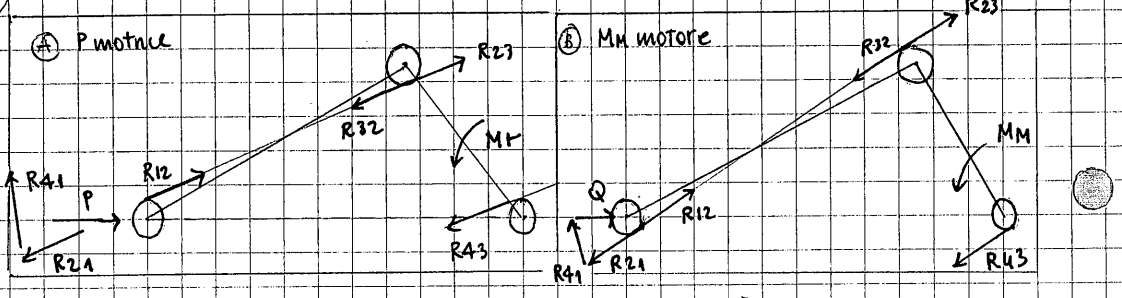
COPPIA ROTOIDALE – CIRCOLO di ATTRITO



$\rho = r \cdot \sin\varphi \simeq r \cdot f$

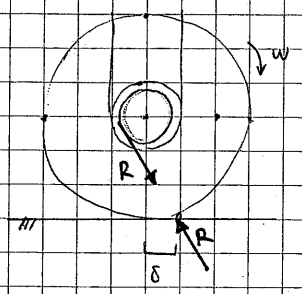
La reazione scambiata tra i due corpi è tangente al circolo di attrito

Manovellismo con attrito

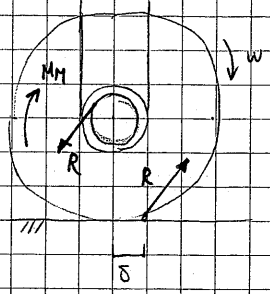


R41 inclinata di φ — R41 inclinata di φ

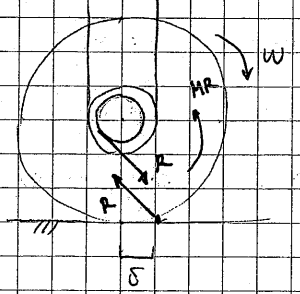
RUOTA TRASCINATA



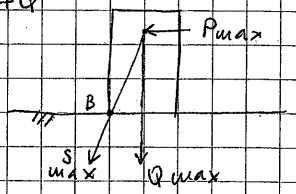
RUOTA MOTRICE



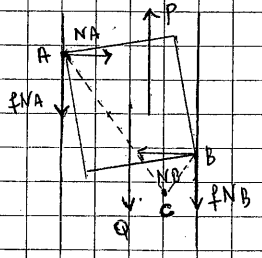
RUOTA FRENATA



Ribaltamento: limite del ribaltamento quando la risultante $S = P + Q$ individua un punto sul bordo della superficie del corpo



Impuntamento: $P \to \infty$ si ha impuntamento quando la forza P passa per il punto di intersezione tra R_A e R_B delle due guide (C)



Per trovare il verso di NA e NB
- ti metti in B, valuti il momento generato dalla forza in A e allora NB deve generare un momento opposto
- ti metti in A, valuti il momento generato dalla forza in B e allora NA deve generare un momento opposto

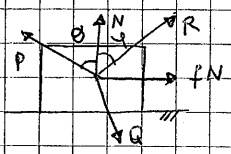
RENDIMENTO $\quad L_m + L_p + L_r = \Delta E = \emptyset$

$$\eta = \frac{|L_r|}{L_m} = 1 - \frac{|L_p|}{L_m} = \frac{L_{m0}}{L_m} = \frac{P_0}{P} = \frac{M_0}{M}$$ (in assenza di attrito)

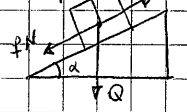
Moto retrogrado: $\eta' = \frac{|L_r'|}{L_m'} = \frac{|L_r'|}{|L_r|} = \frac{|L_r'|}{L_{m0}} = \frac{P'}{P_0}$ $\qquad \eta = \frac{1}{\eta(-f)}$

IN SERIE $\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3$ $\qquad$ IN PARALLELO $\eta = \eta_1 \cdot \frac{L_{m1}}{L_m} + \eta_2 \cdot \frac{L_{m2}}{L_m} + \eta_3 \cdot \frac{L_{m3}}{L_m}$

Coppia prismatica: $\eta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\theta+\varphi)}{\operatorname{sen}(\alpha+\varphi)}$



Piano inclinato: $\eta = \frac{1}{1 + f \cdot \cot\alpha}$



caso particolare della cp con $\theta = \frac{\pi}{2}$

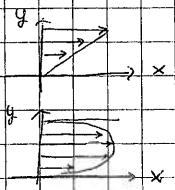
Coppia elicoidale: $\eta = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\varphi)}$ $\qquad$ è un piano inclinato con $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$

USURA

Ipotesi di Reye: $V \propto L_p$ (lavoro perso per attrito)

- volume usurato: $V = KNS$
- altezza usurata: $h = V/A$
- velocità di usura: $dh/dt = K_p \cdot v \quad p = N/A$

LUBRIFICAZIONE



- Moto di Couette: P costante, un corpo mobile
- Moto di Poiseville: P variabile, corpi tutti fermi

- viscosità dinamica: μ $[Pa \cdot s]$
- viscosità cinematica $\nu = \mu/\rho$ $[m^2/s]$

Formula di Newton $\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$ = azione tangenziale fra gli strati del fluido

IPOTESI
- Fluido newtoniano in moto laminare
- μ e ρ costanti
- Forze di massa e inerzia trascurabili
- Moto sottile

Equazioni di equilibrio $\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 y}$ $\quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ $\quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \cdot \frac{\partial^2 v_z}{\partial^2 y}$

Equazione di continuità: $\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = V$ (velocità del corpo ①)

$q_x = \int_0^h v_x \, dy \qquad q_z = \int_0^h v_z \, dy$

Velocità: $v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(h-y) - U\left(1 - \frac{y}{h}\right)$ $\quad v_z = \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(h-y)$

$(v_x(0) = -U \quad v_x(h) = 0)$ $\qquad (v_z(0) = v_z(h) = 0)$

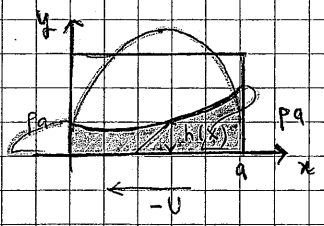
Equazione di Reynolds: (combinazione delle equazioni di continuità con q_x e q_z)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} h^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z} h^3\right) = -6\mu \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - 12\mu V$$

Eq. di Reynolds RIDOTTA $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} h^3\right) = -6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} - 12\mu V \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial z} = 0\right)$

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 9837745

• Lubrificazione idrodinamica : $V=0$



$$\frac{\partial p}{\partial x} = +6\mu U\left[\frac{h^*-h}{h^3}\right]$$

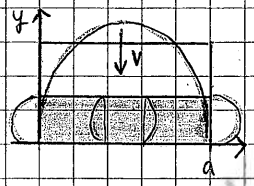
h^* = altezza tale che $\frac{dp}{dx}=0$

$$\cdot\ p-pa = \int_0^x \frac{dp}{\partial x}\,dx$$

COND. AL CONTORNO: $p=pa$ in $x=0 \vee x=a$

- CARICO PER UNITÀ DI LUNGHEZZA: $P_1 = \int_0^a (p-pa)\,dx$
- TENSIONE TANGENZIALE DAL FLUIDO: $\tau = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} = \mu U\ \frac{4h-3h^*}{h^2}$
- FORZA TANGENZIALE per UNITÀ DI LUNGH. $T_1 = \int_0^a \tau\,dx$
- COEFFICIENTE D'ATTRITO: $f = T_1/P_1$ (stesso per tutti e 3)
- PORTATA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA: $q_x = -Uh^*/2$

• Lubrificazione per accostamento: $U=0$



$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{h^3}(a-2x)$$

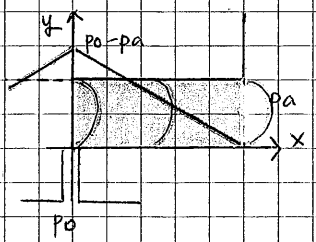
h non dipende da x

$$\cdot\ p-pa = \frac{6\mu V}{h^3}x(a-x)$$

COND. AL CONTORNO: $p=p_a$ in $x=0 \vee x=a$

- CARICO PER UNITÀ DI LUNGHEZZA: $P_1 = \frac{\mu V}{h^3}a^3$
- TENSIONE TANGENZIALE DAL FLUIDO: $\tau_x = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\Big|_{y=0}$
- FORZA TANGENZIALE per UNITÀ DI LUNGH. $T_1 = \phi$
- PORTATA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA: $q_x = -\frac{V}{2}(a-2x)$

• Lubrificazione idrostatica $U=V=0$



$$\frac{dp}{dx} = \frac{pa-po}{a}$$

$$\cdot\ p- = \frac{pa-po}{a}x + po$$

$$P_1 = \frac{a}{2}(po-pa)$$

$$f = \frac{T}{F} = f_s\cdot\frac{F_s}{F} + f_L\cdot\frac{F_L}{F}$$

(tra le superfici / del liquido)

Altezza limite

$$\lambda = \frac{h_{min}}{\sqrt{Rq_1^2+Rq_2^2}}$$

$$\mu = \mu_0\, e^{\alpha(po-pa)}$$

$$\Delta T = \frac{fFU}{\rho CQ}$$

- potenza persa per attrito = fFU
- " termica accumulata = $\rho CQ\Delta T$

MASTER COPY
Tel. 030 831 2126
Cell. 388 9837745